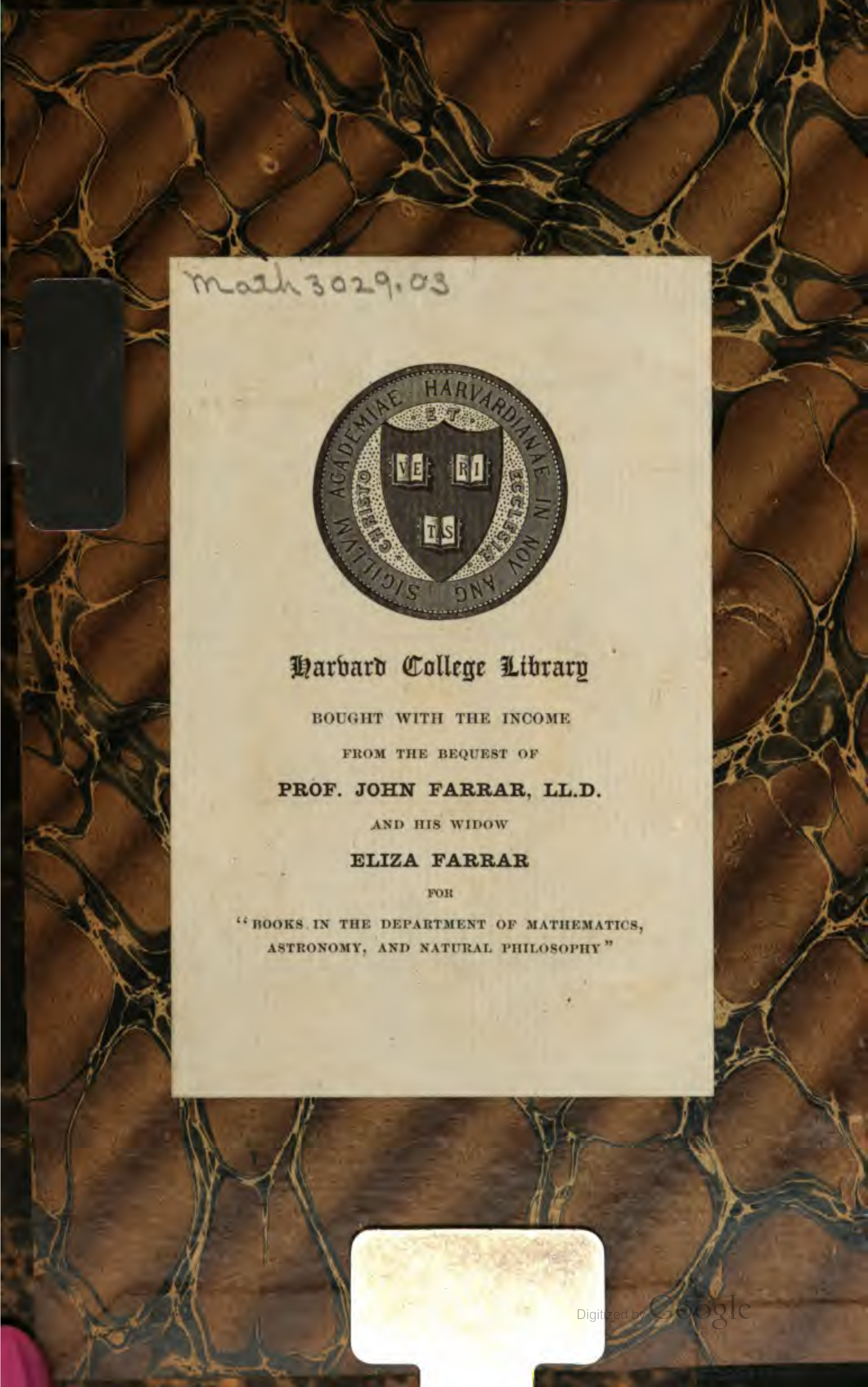

Math 3029.03
SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS
Harvard College Library
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.
AND HIS WIDOW
ELIZA FARRAR
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY"
Digitized by Google






EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL INTÉGRAL

PAR

M. Ed. BRAHY,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, CONDUCTEUR
HONORAIRE DES MINES,
ANCIEN PROFESSEUR D'ATHÉNÉE.

NOUVELLE ÉDITION ENTIÈREMENT REVUE

PARIS,

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS & FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55

—

1903




EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL INTÉGRAL

Autre ouvrage du même auteur :

Exercices méthodiques du calcul différentiel.

Bruxelles. — HAYEZ, imprimeur.

EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL INTÉGRAL

PAR

M. Ed. BRAHY,

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, CONDUCTEUR HONORAIRE DES MINES,
ANCIEN PROFESSEUR D'ATHÉNÉE.

NOUVELLE ÉDITION ENTIÈREMENT REVUE

PARIS,

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS & FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55

—

1903

PRÉFACE.

Notre but, en publiant ce nouveau recueil, est le même que celui qui a été atteint — on nous a encouragé à le croire — par les *Exercices méthodiques de calcul différentiel*: être utile aux élèves qui abordent le calcul infinitésimal.

Pour parvenir à cette fin, la même disposition de travail, les mêmes moyens ont été employés dans chacun des chapitres des deux recueils.

Dans la préparation de ce livre, nous avons rencontré beaucoup plus de difficulté que pour le calcul différentiel.

C'est que les méthodes générales d'intégration sont bien moins nombreuses que celles de différentiation. Pour être méthodique, il nous a fallu rester très élémentaire.

De là, les omissions, volontaires et réfléchies pourtant, dont certes on nous accusera. Mais il nous a paru devoir élaguer de cet ouvrage des théories qui, si belles et si ingénieuses qu'elles puissent être, ne

présentaient pas assez d'applications. Apprendre à intégrer de sorte que les traités spéciaux soient rendus abordables, tel a été notre principal objectif.

Quant à la paternité des exemples et des exercices présentés dans cet ouvrage, nous renvoyons à ce que nous avons dit sur ce point dans la Préface du premier recueil.

Un conseil aux élèves pour terminer : s'ils veulent réaliser des progrès rapides par l'emploi de l'un et de l'autre des *Exercices méthodiques*, ils s'imposeront, chaque jour, la tâche suivante : 1° revoir, avec l'ouvrage adopté dans le cours, la partie théorique dont les résultats sont rappelés en tête d'un chapitre ou d'une section de chapitre ; 2° lire avec attention les exemples d'application, puis les faire et les refaire, se les approprier ; 3° effectuer ne fût-ce qu'un ou deux des exercices qui viennent à la suite.

Nous sommes persuadé que ceux qui, quotidiennement et avec ténacité, suivront ce conseil, nous seront reconnaissants de le leur avoir donné.

TABLE DES MATIÈRES

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

EXERCICES MÉTHODIQUES

DE

CALCUL INTÉGRAL

INTÉGRATION DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

Rappelons sommairement :

1° Que la différentiation et l'intégration étant des opérations inverses, on a :

$$d.\int f(x)dx = f(x)dx,$$
$$\int df(x) \quad = f(x).$$

2° Que $F(x)$ étant une intégrale particulière de l'expression différentielle $f(x)\,dx$, $F(x) + C$ en est l'intégrale générale; C représentant une constante arbitraire. De sorte que

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

3° Que l'on peut faire sortir, du signe d'intégration, toute quantité constante qui multiplie la différentielle. Ainsi, a désignant une quantité constante,

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

4° Que l'intégrale d'une somme algébrique de différentielles est égale à la somme des intégrales de ces différentielles. Ainsi

$$\int \left[f(x)dx + \varphi(x)dx - \psi(x)dx\right]$$
$$= \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int \psi(x)dx.$$

CHAPITRE I.

INTÉGRATION IMMÉDIATE.

L'application des trois premiers points que nous venons de rappeler permet d'obtenir *immédiatement* les intégrales des différentielles des fonctions simples dont nous avons dressé le tableau au chapitre I des *Exercices méthodiques de calcul différentiel.*

Ainsi, de ce que

$$d\,.\,x^m = mx^{m-1}\,dx,$$

on tire :

$$\int d\,.\,x^m = \int mx^{m-1}\,dx,$$

$$x^m = m\int x^{m-1}\,dx.$$

D'où

$$\int x^{m-1}\,dx = \frac{x^m}{m},$$

ou, si l'on remplace m par $m+1$,

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{C}$$

Facilement, on dressera donc le tableau suivant :

$$(1)\quad \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{C}.$$

$$(2)\quad \int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \text{C}.$$

$$(3)\quad \int \frac{dx}{x} = \frac{\text{Log}\,x}{\text{Log}\,e} + \text{C}.$$

$$(4)\quad \int \frac{dx}{x} = \log x + \text{C}.$$

(5) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

(6) $$\int e^x dx = e^x + C.$$

(7) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

(8) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

(9) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C.$$

(10) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C.$$

(11) $$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = \operatorname{séc} x + C.$$

(12) $$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{coséc} x + C.$$

(13) $$\int \sin x\, dx = \sin \operatorname{vers} x + C.$$

(14) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C.$$

(15) $$\int \frac{-dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \cos x + C.$$

(16) $$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + C.$$

(17) $$\int \frac{-dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x + C.$$

(18) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc} \operatorname{séc} x + C.$$

$$(19) \quad \int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arc coséc } x + C.$$

$$(20) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \text{arc sin vers } x + C.$$

Nota. — Quand l'expression d'une intégrale est logarithmique, au lieu de représenter la constante arbitraire par C, on la représente avec avantage par Log C ou par log C, ou par une fonction convenable de ces logarithmes de C.

Ainsi les intégrales (3) et (4) du tableau ci-dessus s'écriront :

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } e} + \text{Log C} = \frac{\text{Log C}x}{\text{Log } e},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + \log C = \log Cx.$$

Les élèves ne pourraient trop s'exercer, non seulement à reproduire de mémoire le tableau d'intégrales primordiales précédent, mais encore à le traduire en langage ordinaire et en regardant x comme représentant toute fonction explicite de x. Ainsi l'égalité

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x$$

s'énoncera : l'intégrale de la différentielle d'une fonction de x, divisée par la racine carrée de 1 moins le carré de la fonction, est égale à l'arc dont le sinus est la fonction.

Cette recommandation est de la plus grande importance; elle permet, par exemple, d'écrire immédiatement :

$$\int \frac{max^{m-1}dx}{\sqrt{1-(ax^m+b)^2}} = \text{arc sin } (ax^m+b).$$

CHAPITRE II.

INTÉGRATION PAR TRANSFORMATIONS ALGÉBRIQUES.

Quand l'intégration immédiate n'est point possible, on peut souvent faire subir, à la différentielle qu'il s'agit d'intégrer, des transformations algébriques qui, effectuées, permettent d'employer le tableau dressé au chapitre Ier et, même, peuvent faire trouver de nouvelles intégrales primordiales.

Ces transformations algébriques sont de deux sortes. Dans les unes, la variable indépendante x est conservée; dans les autres, il y a changement de variable. De là deux méthodes d'intégration, objet des sections suivantes.

SECTION I. — *Intégration par transformations algébriques, variable indépendante conservée.*

Les transformations algébriques dont il s'agit (comprenant les transformations trigonométriques) conduisent d'ordinaire, d'une manière très simple, au résultat cherché.

Exemple I.

Soit à intégrer les expressions différentielles :

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \frac{dx}{a^2+x^2},\quad \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Si l'on divise les deux termes de la première par a et ceux des deux autres par a^2, on obtient :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\frac{dx}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\text{arc sin}\,\frac{x}{a}+C.$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}} = \text{arc séc}\,\frac{x}{a} + C.$$

De la même manière, on trouve :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc cos}\,\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{-dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc cotg}\,\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arc cosec}\,\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \text{arc sin vers}\,\frac{x}{a} + C.$$

Nota. — Les intégrales des fonctions circulaires se présentent souvent sous ces formes; nous en avons présenté l'ensemble, pour qu'il soit plus facile de les écrire de mémoire.

Exemple II.

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{a+bx^n}.$$

Multipliant les deux termes par nb, afin que le numérateur devienne la différentielle du dénominateur, on a :

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nb}\int \frac{nbx^{n-1}\,dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nb}\log C(a+bx^n).$$

Exemple III.

$\int (ax^2 + bx + c)^2 dx.$

Le développement du carré donne :

$$\int (ax^2 + bx + c)^2 dx$$
$$= \int [a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2] dx$$
$$= a^2\int x^4dx + 2ab\int x^3dx + (b^2 + 2ac)\int x^2dx + 2bc\int xdx + c^2\int dx$$
$$= \frac{a^2x^5}{5} + \frac{abx^4}{2} + \frac{(b^2 + 2ac)x^3}{3} + bcx^2 + c^2x + C.$$

Nota. — On opérera de même chaque fois que l'expression différentielle pourra se décomposer dans la somme algébrique de plusieurs autres dont on connaisse les intégrales ou que l'on sache intégrer.

Exemple IV.

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} dx.$$

La multiplication des deux termes par $\sqrt{a+x}$ donne :

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} dx = \int \frac{(a+x)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$+ \int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a \,.\, \text{arc sin} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Exemple V.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

Multipliant les deux termes par x^{-3}, il vient :

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x^{-3}dx}{\sqrt{x^{-2}-1}} = -\sqrt{x^{-2}-1}$$
$$= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$$

Exemple VI.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Le dénominateur peut s'écrire $\frac{3}{4} + (x + \frac{1}{2})^2$.
Donc

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \text{ arc tang } \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Exemple VII.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}}.$$

Le trinôme sub-radical peut s'écrire $5 - (x-2)^2$.
Donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}} = \text{arc sin } \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C.$$

Exemple VIII.

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{2-5x-3x^2}}.$$

La transformation du trinôme sub-radical conduit à

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{2-5x-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{-dx}{\sqrt{\frac{49}{36}-\left(x+\frac{5}{6}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc cos } \frac{6x+5}{7} + C.$$

Exemple IX.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}.$$

La multiplication des deux termes par x^{-2} donne :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}} = \int \frac{x^{-1}dx}{\sqrt{4-4x^{-1}-x^{-2}}}$$

$$= \int \frac{-1(-x^{-2}dx)}{\sqrt{8-(x^{-1}+2)^2}} = \text{arc cos}\frac{x^{-1}+2}{2\sqrt{2}}$$

$$= \text{arc cos}\frac{2x+1}{2\sqrt{2}\,.\,x}+\text{C}.$$

Exemple X.

$$\int \frac{2x-3}{x^2+2ax+3a^2}dx.$$

Par addition et soustraction de $2a$ au numérateur, on obtient :

$$\int \frac{2x-3}{x^2+2ax+3a^2}dx = \int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+3a^2}dx$$

$$-(2a+3)\int \frac{dx}{2a^2+(x+a)^2} = \log \text{C}(x^2+2ax+3a^2)$$

$$-\frac{2a+3}{a\sqrt{2}}\text{arc tang}\frac{x+a}{a\sqrt{2}}.$$

Exemple XI.

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}.$$

La décomposition, par l'algèbre, de la fraction rationnelle $\frac{1}{x^2 - a^2}$ donne

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right);$$

et, par suite,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x - a} - \int \frac{dx}{x + a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a} + C;$$

intégrale primordiale que les élèves devront ajouter à celles du tableau, chapitre I.

Nous disons :

$$(21) \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a} + C.$$

Nota. — De cette intégrale, on tire aisément :

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{x + a}{x - a} + C.$$

Exemple XII.

Dans l'intégration des différentielles trigonométriques de la forme $\sin^m x \cos^n x\, dx$, m et n étant des exposants entiers, positifs ou négatifs, on est amené à chercher les intégrales des différentielles :

$$dx, \qquad \sin x\, dx, \qquad \cos x\, dx,$$

$$\operatorname{tang} x\, dx, \qquad \operatorname{cotg} x\, dx,$$

$$\sin x \cos x\, dx, \qquad \frac{dx}{\sin x \cos x},$$

$$\operatorname{séc} x\, dx, \qquad \operatorname{coséc} x\, dx,$$

$$\operatorname{tang}^m x\, dx, \qquad \operatorname{cotg}^m x\, dx.$$

Les intégrales de dx, sin x dx, cos x dx sont connues; celles de tang^m x dx, cotg^m x dx seront données au chapitre III, section II; chercher (question de grande utilité) les intégrales des autres.

Solutions.

$$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \log \sin x + C.$$

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\log \cos x + C.$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x\,.\,2dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tang} x} = \log \operatorname{tang} x + C.$$

$$\int \operatorname{cos\acute{e}c} x\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\,.\,\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$= \log \operatorname{tang}\frac{x}{2} + C.$$

$$\int \operatorname{s\acute{e}c} x\,dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\,.\,\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$$

$$= \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + C.$$

Exemple XIII.

$$\int \frac{1 - x \sin \alpha}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} dx.$$

Que l'on remplace, au numérateur, 1 par $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$, et l'on obtient :

$$\int \frac{1 - x \sin \alpha}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} dx$$

$$= \int \frac{\cos^2 \alpha - \sin \alpha(x - \sin \alpha)}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} dx$$

$$= \cos^2 \alpha \int \frac{dx}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} - \sin \alpha \int \frac{x - \sin \alpha}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} dx$$

$$= \cos^2 \alpha \int \frac{dx}{\cos^2 \alpha + (x - \sin \alpha)^2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \int \frac{2x - 2 \sin \alpha}{1 - 2x \sin \alpha + x^2} dx$$

$$= \cos \alpha . \text{arc tang} \frac{x - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha \log \sqrt{1 - 2x \sin \alpha + x^2} + C.$$

SECTION II. — *Intégration par substitution.*

Quand l'intégrale de $f(x)\,dx$ ne peut être obtenue immédiatement, on peut encore établir une égalité entre deux expressions de x et d'une nouvelle variable indépendante z, expressions choisies de manière que la différentielle $f(x)\,dx$ se transforme, par le calcul, dans la différentielle intégrable $\varphi(z)\,dz$.

Le résultat de l'intégration de $f(x)\,dx$ n'est autre que celui de l'intégration de $\varphi(z)\,dz$ après que, dans ce dernier, on a remplacé z par sa valeur en x, tirée de l'égalité posée.

Exemple I.

Soit l'expression différentielle $f(x).\,f'(x)\,dx$, c'est-à-dire le produit d'une fonction $f(x)$ et de sa différentielle $f'(x)\,dx$.

Si l'on pose $$f(x) = z,$$
d'où $$f'(x)\,dx = dz,$$
on obtient :

$$\int f(x) \,.\, f'(x)dx = \int z\,dz = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}[f(x)]^2 + \mathrm{C}.$$

Donc l'intégrale du produit d'une fonction et de sa différentielle est égale à la moitié du carré de la fonction.

De sorte que l'on peut écrire immédiatement :

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + \mathrm{C}.$$

$$\int \log x \,.\, \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(\log x)^2 + \mathrm{C}.$$

$$\int \operatorname{arc\,tang} x \,.\, \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tang} x)^2 + \mathrm{C}.$$

On trouverait de la même manière :

$$\int [f(x)]^n \,.\, f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + \mathrm{C},$$

expression que nous laissons aux élèves de traduire en langage ordinaire et qui permet d'écrire, par exemple,

$$\int (a+bx^m)^n x^{m-1}\,dx = \frac{1}{mb}\int (a+bx^m)^n \,.\, mbx^{m-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{mb(n+1)}(a+bx^m)^{n+1} + \mathrm{C}.$$

Exemple II.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}.$$

Posant $x - a = z$, d'où $dx = dz$, on obtient :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int z^{-n}\,dz = \frac{z^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)z^{n-1}}$$
$$= -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \mathrm{C}.$$

Exemple III.

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Que l'on pose $x^2+a^2=z$, d'où $xdx=\frac{dz}{2}$ et l'on trouve :

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int z^{-n}dz=-\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Exemple IV.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}$$ (Voir exemple IX, section I.)

En posant $x=\frac{1}{z}$, d'où $dx=-\frac{dz}{z^2}$, on a :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-4x-1}}=\int \frac{\frac{-dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{4}{z^2}-\frac{4}{z}-1}}$$

$$=\int \frac{-dz}{\sqrt{4-4z-z^2}}=\int \frac{-dz}{\sqrt{8-(z+2)^2}}=\text{arc cos}\,\frac{z+2}{2\sqrt{2}}$$

$$=\text{arc cos}\,\frac{2x+1}{2\sqrt{2}x}+C.$$

Exemple V.

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La multiplication des deux termes, par x^{-3}, donne :

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{x^{-3}dx}{[x^{-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}]^3}=\int \frac{x^{-3}dx}{(x^{-2}-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int \frac{-2x^{-3}dx}{(x^{-2}-1)^{\frac{3}{2}}};$$

et, si l'on pose, $x^{-2} - 1 = z$, d'où $-2x^{-3}\,dx = dz$,

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}dz = -\frac{1}{2}\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^{-2}-1}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Exemple VI.

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{6(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{6\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}\,dx.$$

Posons $x = z^6$, l'exposant de z étant le moindre multiple des dénominateurs des exposants fractionnaires $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.

Nous obtiendrons :

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{6(x^{\frac{1}{3}}+1)}\,dx = \int \frac{z^3-1}{z^2+1}\,z^5dz = \int \frac{z^8-z^5}{z^2+1}\,dz$$

$$= \int \left(z^6 - z^4 - z^3 + z^2 + z - 1 + \frac{1-z}{z^2+1}\right) dz$$

$$= \int z^6 dz - \int z^4 dz - \int z^3 dz + \int z^2 dz + \int z\,dz - \int dz$$

$$+ \int \frac{dz}{z^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2z\,dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{z^7}{7} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} - z + \text{arc tang } z - \log\sqrt{z^2+1}$$

et, en remplaçant z par $x^{\frac{1}{6}}$,

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{6(\sqrt[3]{x}+1)}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{4} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{2} - x^{\frac{1}{6}}$$

$$+ \text{arc tang } x^{\frac{1}{6}} - \log\sqrt{x^{\frac{1}{3}}+1} + C.$$

Nota. — On opérera de la même manière chaque fois que la différentielle à intégrer ne contiendra, en fait de radicaux, que des *monômes irrationnels* de x.

Exemple VII.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Posant $\sqrt{x^2+1} = z - x$, afin qu'en élevant les deux membres au carré, l'égalité résultante soit du premier degré en x, on trouve :

$$x = \frac{z^2-1}{2z};$$

et, par suite,

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad dx = \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz.$$

Par substitution, on a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{z^2+1}{2z^2}\,dz \cdot \frac{2z}{z^2+1} = \int \frac{dz}{z} = \log z$$
$$= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \mathrm{C}.$$

De même, on obtiendrait :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \mathrm{C}.$$

De sorte que l'on peut écrire :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right) + \mathrm{C}.$$

Si l'on demandait le résultat de l'intégration de $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ en divisant les deux termes par a, on trouverait :

$$(22) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \log \frac{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}{a} + \mathrm{C}.$$

Intégrale primordiale; l'ajouter à celles du tableau, chapitre I.

Exemple VIII.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Que l'on pose $\sqrt{1-x^2} = xz - 1$, et, en élevant les deux membres au carré, l'égalité résultante sera du premier degré en x, et donnera :

$$x = \frac{2z}{z^2+1};$$

d'où

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{z^2-1}{z^2+1}, \quad dx = -2\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}dz,$$

et, par substitution,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int -2\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}dz \times \frac{z^2+1}{2z} \times \frac{z^2+1}{z^2-1}$$

$$= -\int \frac{dz}{z} = -\log z = \log\frac{1}{z} = \log\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C.$$

De même, on trouverait :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Donc, en une seule formule :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1\pm x^2}} = \log\frac{x}{1+\sqrt{1\pm x^2}} + C.$$

Si la différentielle à intégrer était $\frac{dx}{x\sqrt{a^2 \pm x^2}}$, la division des deux termes, par a^2, fournirait :

$$(23) \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2\pm x^2}} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{a+\sqrt{a^2\pm x^2}} + C.$$

Encore une intégrale primordiale que les élèves devront ajouter à celles du tableau, chapitre I.

Nous ne présentons que ce peu d'exemples de l'intégration par substitution, notre but n'étant ici que d'initier aux ressources de cette méthode dont les chapitres IV et V ne sont que le développement.

Voici une série de questions à résoudre, en faisant usage de l'intégration immédiate et de l'intégration par transformations algébriques.

Pour abréger, nous désignerons souvent, dans tout ce qui suit, le résultat de l'intégration par S.

Exercices.

1. Pourquoi peut-on écrire, immédiatement :

$$\int \frac{[3(x-a)^2 - 2b]\,dx}{(x-a)^3 - 2bx} = \log\left[(x-a)^3 - 2bx\right] + C?$$

Réponse. — Parce que le numérateur de la quantité sous le signe $\int$ est la différentielle du dénominateur. Formule (4).

2. Pourquoi peut-on écrire, immédiatement :

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C?$$

Réponse. — Parce que le numérateur de la quantité sous le signe $\int$ est la différentielle de la quantité subradicale. Formule (2).

3. Écrire, immédiatement, le résultat de l'intégration de

$$\frac{adx}{a^2x^2 - b^2}.$$

$$S = \frac{1}{2b}\log\frac{ax-b}{ax+b} + C. \qquad \text{Formule (21).}$$

4. Écrire, immédiatement, le résultat de l'intégration de

$$\frac{ma^m\,x^{m-1}\,dx}{\sqrt{(ax)^{2m} \pm b^{2n}}}.$$

$$S = \log\frac{(ax)^m + \sqrt{(ax)^{2m} + b^{2n}}}{b^n} + C. \qquad \text{Formule (22).}$$

5. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\right)dx.$

L'expression peut s'écrire :

$$\int\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}-\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right)dx$$

et donne, formule (1) :

$$S=\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}+C.$$

6. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{x}}.$

$$S=-\frac{3}{4x\sqrt[3]{x}}+C.$$

7. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2x\sqrt{x}}dx.$

Soit qu'on opère directement, soit qu'on pose d'abord $x=z^2$, on trouve :

$$S=\frac{x-1}{\sqrt{x}}+\log Cx.$$

8. $\displaystyle\int(ax^m+b)(a'x^n+b')\,dx.$

$$S=\left(aa'\frac{x^{m+n}}{m+n+1}+ab'\frac{x^m}{m+1}+ba'\frac{x^n}{n+1}+bb'\right)x+C.$$

9. $\displaystyle\int\frac{xdx}{a^2b^2+x^4}.$

On a :

$$\int\frac{xdx}{a^2b^2+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{a^2b^2+(x^2)^2}=\frac{1}{2ab}\text{arc tang}\frac{x^2}{ab}+C.$$

10. $\displaystyle\int\frac{xdx}{a^2b^2-x^4}.$

$$\int\frac{xdx}{a^2b^2-x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{a^2b^2-(x^2)^2}=\frac{1}{4ab}\log C.\frac{x^2+ab}{x^2-ab}.$$

11. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4b^4 - x^6}}$.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^4b^4 - x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{\sqrt{a^4b^4 - (x^3)^2}} = \frac{1}{3} \text{arc sin} \frac{x^3}{a^2b^2} + C.$$

12. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(ab)^{2m} + x^{2n}}}$.

$$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{(ab)^{2m} + x^{2n}}} = \frac{1}{n}\int \frac{nx^{n-1}\,dx}{\sqrt{(ab)^{2m} + (x^n)^2}}$$

$$= \frac{1}{n} \log \frac{x^n + \sqrt{(ab)^{2m} + x^{2n}}}{(ab)^m} + C.$$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

La multiplication des deux termes par $\sqrt{x^2+1}$ conduit à

$$S = \sqrt{x^2+1} + \log \frac{Cx}{1+\sqrt{x^2+1}}.$$

14. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

Si l'on multiplie les deux termes par $\sqrt{x+1}$, on trouve :

$$S = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + \text{arc séc } x + C.$$

15. $\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}}$.

En multipliant les deux termes par x^{-n-1}, on obtient d'abord :

$$\int \frac{dx}{(a+bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \int \frac{x^{-n-1}\,dx}{(ax^{-n}+b)^{\frac{n+1}{n}}} = -\frac{1}{na}\int \frac{-nax^{-n-1}\,dx}{(ax^{-n}+b)^{\frac{n+1}{n}}},$$

puis, posant $ax^{-n} + b = z$,

$$S = \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}}.$$

16. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}}\, dx.$ (Voir l'exemple VI, section II.)

$$S = 4\left(\frac{1}{3}\sqrt[4]{x^3} - \sqrt[4]{x} + \text{arc tang}\sqrt[4]{x}\right) + C.$$

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1}\, dx.$

$$S = 6\left[\frac{1}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{4}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + \log(x^{\frac{1}{6}} - 1)\right] + C.$$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + x - 1}.$

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{2x + 1 - \sqrt{5}}{2x + 1 + \sqrt{5}} + C.$$

19. Pourquoi le résultat de l'exercice qui précède

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \log \frac{2x + 1 - \sqrt{5}}{2x + 1 + \sqrt{5}} + C,$$

est-il si différent de celui que l'on a trouvé, exemple VI, section I,

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tang} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C?...$$

Réponse. — La forme générale des deux intégrales est

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q},$$

et, par décomposition du trinôme,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}.$$

Si l'on a $q > \frac{p^2}{4}$, on intègre par la formule (16); mais si l'on a $q < \frac{p^2}{4}$, on intègre par la formule (21).

20. $\int \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1}$.

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tang} \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x - x^2}}$.

$$S = \log \frac{x + 2 + \sqrt{1 + 4x + x^2}}{\sqrt{3}} + C.$$

22. Pourquoi le résultat de l'exercice 21

$$\int \frac{dx}{1 + 4x + x^2} + \log \frac{x + 2 + \sqrt{1 + 4x + x^2}}{\sqrt{3}} + C,$$

est-il si différent de celui qui a été obtenu section I, exemple VII,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x - x^2}} = \text{arc sin} \frac{x-2}{\sqrt{5}} + C?...$$

Réponse. — Les deux intégrales sont contenues dans l'expression

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pm x^2 + px + q}},$$

qui, par décomposition du trinôme, devient :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}} \text{ ou } \int \frac{dx}{\sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right) - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}}$$

et, par conséquent, s'intègre par la formule (22) ou par la formule (14), selon que l'exposant de x^2 est $+1$ ou -1.

23. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2(a+b)x-(a+b)^2x^2}}.$$

$$S = \frac{1}{a+b} \text{arc sin} \frac{(a+b)x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

24. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2ax-a^2}}.$$

Multipliant les deux termes par x^{-2}, puis posant $x^{-1} = z$, on obtient :

$$S = \frac{1}{a} \text{arc sin} \frac{x-a}{x\sqrt{2}} + C.$$

25. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+2ax-x^2}}.$$

En opérant comme dans l'exercice qui précède, on trouve :

$$S = \frac{1}{a} \log \frac{x\sqrt{2}}{a+x+\sqrt{a^2+2ax-x^2}} + C.$$

26. $$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}}.$$

La décomposition du trinôme, puis la substitution de z à $x+\frac{p}{2}$, permettent d'employer le résultat de l'exercice 15 et donnent :

$$S = \frac{2}{4q-p^2} \cdot \frac{2x+p}{\sqrt{x^2+px+q}} + C.$$

27. $$\int \frac{xdx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a :

$$\int \frac{xdx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+p-p)\,dx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}} - \frac{p}{2}\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\frac{3}{2}}}.$$

Des deux intégrales dans lesquelles se décompose ainsi l'intégrale proposée, la première se trouve facilement en posant $x^2+px+q=z$; et la seconde est, à une constante près, celle de l'exercice précédent.

$$S = -\frac{2}{4q-p^2}\cdot\frac{px+2q}{\sqrt{x^2+px+q}} + C.$$

28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\,dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$S = \operatorname{tang} x - \operatorname{cotg} x = -2\operatorname{cotg} 2x + C.$$

29. $\int \frac{dx}{1-\cos x}$.

$$1-\cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x;$$

substituant, on obtient :

$$S = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x + C.$$

30. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+b^2\sin x}$.

$$S = \frac{1}{b^2}\log(a^2+b^2\sin x) + C.$$

31. $\int (\operatorname{tang}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x)\,dx$.

De ce que $\operatorname{tang}^2 x = \operatorname{séc}^2 x - 1$ et $\operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosée}^2 x - 1$,

$$S = \operatorname{tang} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\sin 2x} + C.$$

32. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

Divisant les deux termes par $\cos^2 x$, il vient :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc tang} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \text{tang}\, x \right) + C.$$

33. $\int \sin mx \cos nx \, dx$.

La transformation du produit $\sin mx \cos nx$ dans la somme de deux sinus par la formule connue conduit à

$$S = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos (m+n)x}{m+n} + \frac{\cos (m-n)x}{m-n} \right] + C.$$

34. Vérifier, en intégrant leurs premiers membres, les égalités :

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m+n)x}{m+n} - \frac{\sin (m-n)x}{m-n} \right] + C,$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m+n)x}{m+n} + \frac{\sin (m-n)x}{m-n} \right] + C.$$

35. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}$.

Le dénominateur peut s'écrire

$$5 \left(\sin^2 \frac{1}{2} x + \cos^2 \frac{1}{2} x \right) + 4 \left(\cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x \right).$$

Par suite

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x} = \int \frac{dx}{9 \cos^2 \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

$$= 2 \int \frac{d \, . \frac{1}{2} x}{9 \cos^2 \frac{1}{2} x + \sin^2 \frac{1}{2} x},$$

et, en divisant les deux termes de la dernière expression par $\cos^2 \frac{1}{2}x$,

$$S = \frac{2}{3} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x \right) + C.$$

36. $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}$.

Même procédé de calcul que dans l'exercice précédent.

$$S = \frac{1}{3} \log \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x + 3}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} x - 3} + C.$$

37. Pourquoi les intégrales des exercices 35 et 36 donnent-elles des résultats si différents?

Réponse. — La forme générale des intégrales est

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

Pour $a > b$,

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{dx}{(a+b) \cos^2 \frac{1}{2} x + (a-b) \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tang} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x \right) + C.$$

Mais pour $a < b$,

$$\int \frac{dx}{a + b \cos x} = \int \frac{dx}{(b+a) \cos^2 \frac{1}{2} x - (b-a) \sin^2 \frac{1}{2} x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{\sqrt{b-a} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a} \operatorname{tang} \frac{1}{2} x - \sqrt{b+a}} + C.$$

38. $\int \frac{dx}{13 + 12 \sin x}$.

$$\int \frac{dx}{13 + 12 \sin x}$$

$$= 2 \int \frac{d.\frac{1}{2}x}{13\left(\sin^2 \frac{1}{2}x + \cos^2 \frac{1}{2}x\right) + 12.2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x}.$$

Divisant les deux termes par $\cos^2 \frac{1}{2}x$, puis posant $\text{tang} \frac{1}{2}x = z$, on trouve, après avoir intégré et remplacé z par $\text{tang} \frac{1}{2}x$,

$$S = \frac{2}{5} \text{arc tang} \left(\frac{13 \,\text{tang} \frac{1}{2}x + 12}{5} \right) + C.$$

39. $\int \frac{dx}{12 + 13 \sin x}$.

Si l'on opère comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$S = \frac{1}{5} \log \frac{2}{3} \left(\frac{3 \,\text{tang} \frac{1}{2}x + 2}{2 \,\text{tang} \frac{1}{2}x + 3} \right) + C.$$

40. Pourquoi les intégrales des exercices 38 et 39 donnent-elles des résultats si différents?

Réponse. — La forme générale des intégrales est

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x}.$$

Pour $a > b$,

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{\frac{a^2-b^2}{a^2}+\left(z+\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{arc tang}\left(\frac{a \operatorname{tang}\frac{1}{2}x+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)+\text{C}.$$

Mais pour $a < b$,

$$\int \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{a}\int \frac{dz}{\left(z+\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2-a^2}{a^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{a \operatorname{tang}\frac{1}{2}x+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a \operatorname{tang}\frac{1}{2}x+b+\sqrt{b^2-a^2}}+\text{C}.$$

41. $\int \frac{dx}{a+b \operatorname{tang} x}$.

$$\frac{1}{a+b\operatorname{tang} x} = \frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x} - \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{a+b\operatorname{tang} x} = \int\left(\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}-\frac{a}{a^2+b^2}\right)dx + \frac{a}{a^2+b^2}\int dx$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[b\log(a\cos x+b\sin x)+ax\right]+\text{C}.$$

42. $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$.

Si l'on pose

$$a = k\cos\alpha, \quad b = k\sin\alpha,$$

on obtient

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \operatorname{tang} \frac{x+\alpha}{2}.$$

43. $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}$.

Posant

$$a = k \sin \alpha, \quad b = k \cos \alpha, \quad c = hk,$$

on trouve :

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{h + \cos(x-\alpha)},$$

l'intégrale finale se traitant comme dans l'exercice 37.

CHAPITRE III.

INTÉGRATION PAR PARTIES.

SECTION I. — *Intégration directe.*

u et v représentant des fonctions de x, on sait que

$$d.uv = udv + vdu.$$

D'où, par intégration et transposition,

$$\int udv = uv - \int vdu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Cela rappelé, si, par les méthodes, objet des deux premiers chapitres, on ne peut intégrer l'expression $f(x)\,dx$, on posera

$$u = f(x), \qquad dv = dx;$$

d'où

$$du = f'(x)\,dx, \quad v = x;$$

et l'on trouvera par substitution dans la relation (1) :

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Donc, si par les procédés déjà vus, l'intégration de $xf'(x)\,dx$ peut s'effectuer, celle de $f(x)\,dx$ sera donnée par l'égalité (2).

Beaucoup plus souvent, on peut décomposer la fonction $f(x)$ en deux facteurs, $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, et, l'expression à intégrer étant alors $\varphi(x)\,\psi(x)\,dx$, on pose :

$$u = \varphi(x), \qquad dv = \psi(x)\,dx;$$

d'où

$$du = \varphi'(x)\,dx, \qquad v = F(x).$$

Par substitution dans la relation fondamentale (1), on obtient :

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x)\,F(x) - \int \varphi'(x)\,F(x)\,dx; \quad . \quad . \quad (3)$$

et, si l'intégrale finale, $\int \varphi'(x).\ F(x)\,dx$, peut se trouver par l'une des méthodes connues, la question est résolue. Le succès de cette intégration dépend, évidemment, du choix des facteurs dans lesquels on décompose la fonction $f(x)$.

Nota. — Dans les applications, nous ne désignerons souvent, pour abréger, que l'un des facteurs.

Exemple I.

$\int \log x\,.\,dx.$

Posons

$$u = \log x, \quad dv = dx;$$

d'où

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

La substitution, dans la relation (1), conduit à

$$\int \log x\,.\,dx = x \log x - \int dx,$$

ou

$$\int \log x\,.\,dx = x(\log x - 1) + C.$$

Exemple II.

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Posant

$$u = \arcsin x, \qquad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

on a :

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad v = -\sqrt{1-x^2}.$$

Substituant dans la relation (1), il vient :

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} . \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} . \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x - \sqrt{1-x^2} . \arcsin x + C.$$

Exemple III.

$$\int x^2 e^x \, dx.$$

Faisons

$$u = x^2, \qquad dv = e^x dx;$$

d'où

$$du = 2xdx, \qquad v = e^x.$$

La substitution dans la relation (1) donne d'abord

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

En intégrant de même, par parties, l'intégrale finale $\int xe^x dx$, c'est-à-dire posant

$$u = x, \qquad dv = e^x dx;$$

d'où

$$du = dx, \qquad v = e^x;$$

la relation fondamentale fournit :

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x,$$

et, par substitution de cette expression de $\int xe^x dx$ dans celle de $\int x^2e^x dx$, on a :

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Nota. — Une double décomposition par parties, comme celle que l'on vient de faire, donne parfois des résultats dignes de remarque ; l'exemple suivant le montrera.

Exemple IV.

$\int e^x \cos x\, dx.$

Posant

$$u = \cos x, \qquad dv = e^x dx :$$

d'où

$$du = - \sin x\, dx, \qquad v = e^x ;$$

on trouve d'abord :

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx. \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

L'intégration de l'intégrale finale, $\int e^x \sin x\, dx$, en posant :

$$u = \sin x, \qquad dv = e^x dx ;$$

d'où

$$du = \cos x\, dx, \qquad v = e^x ;$$

donne

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx. \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Des deux égalités (α) et (β), on tire facilement :

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C,$$

et

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C ;$$

c'est-à-dire le résultat de l'intégration de la différentielle donnée $e^x \cos x\, dx$ et celui de la différentielle similaire $e^x \sin x\, dx$.

Exercices.

1. Montrer, en intégrant, que :

$$\int \cos x \log \sin x \,.\, dx = \sin x (\log \sin x - 1) + C.$$

$$\int \sin x \log \cos x \,.\, dx = \cos x (1 - \log \cos x) + C.$$

2. Effectuer les intégrations qui conduisent aux égalités :

$$\int \text{arc sin } x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc sin } x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \text{arc cos } x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc cos } x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

$$\int \text{arc tang } x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc tang } x - \log\sqrt{1+x^2} + C.$$

$$\int \text{arc cotg } x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc cotg } x + \log\sqrt{1+x^2} + C.$$

$$\int \text{arc séc } x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc séc } x - \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

$$\int \text{arc coséc } x\,.\,dx = x\,.\,\text{arc coséc } x + \log(x + \sqrt{x^2-1}) + C.$$

3. $\int \text{arc sin vers } x\,.\,dx.$

On trouve d'abord :

$$S = x \text{ arc sin vers } x - \int \frac{xdx}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

D'autre part,

$$\int \frac{-xdx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{(1-x-1)\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \sqrt{2x-x^2} - \text{arc sin vers } x.$$

Donc,

$$S = (x-1) \text{ arc sin vers } x + \sqrt{2x-x^2} + C.$$

4. $\int x^2 a^x dx.$

Deux intégrations successives donnent :

$$S = a^x \left[\frac{x^2}{\log a} - \frac{2x}{(\log a)^2} + \frac{2}{(\log a)^3}\right] + C$$

$$= \frac{a^x}{\log a}\left[\left(x - \frac{1}{\log a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\log a}\right)^2\right] + C.$$

5. $\int \frac{xe^{\text{arc sin } x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Si l'on pose $u = e^{\text{arc sin } x}$, on trouve :

$$\int \frac{xe^{\text{arc sin } x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\,e^{\text{arc sin } x} + \int e^{\text{arc sin } x}\,dx.$$

Mais si l'on pose $u = x$, on obtient :

$$\int \frac{xe^{\text{arc sin } x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = xe^{\text{arc sin } x} - \int e^{\text{arc sin } x}\,dx.$$

Additionnant et soustrayant les deux égalités précédentes, membre à membre, on a :

$$\int \frac{xe^{\text{arc sin } x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}e^{\text{arc sin } x}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) + \text{C},$$

et

$$\int e^{\text{arc sin } x}\,dx = \frac{1}{2}e^{\text{arc sin } x}\left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + \text{C}.$$

6. $$\int \frac{a-2x}{\sqrt{ax-x^2}} \cdot \text{arc sin} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx.$$

Posant $u = \text{arc sin} \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$, on obtient :

$$\text{S} = 2\sqrt{ax-x^2}\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} + a\sqrt{2}\log(a+x) + \text{C}.$$

7. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc séc}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx.$$

Faire $u = \text{arc séc}\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ conduit à :

$$\text{S} = -\sqrt{1-x^2}\,\text{arc séc}\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} + \sqrt{2}\,\text{arc tang}\,x + \text{C}.$$

8. $$\int \frac{x(3-x^2)\,\text{arc tang}\,x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

Si l'on pose $u = \text{arc tang}\,x$, $dv = \dfrac{x(2+1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$;

on trouve :

$$\text{S} = \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\text{arc tang}\,x - \text{arc sin}\,x + \text{C}.$$

9. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

Par deux intégrations successives, dans chacune desquelles on pose $u = e^{\operatorname{arc\,tang} x}$, on obtient :

$$\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tang} x} - \int \frac{xe^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx,$$

et

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tang} x} + \int \frac{e^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx.$$

D'où,

$$\int \frac{e^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tang} x} + C,$$

et

$$\int \frac{xe^{\operatorname{arc\,tang} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tang} x} + C.$$

SECTION II. — *Intégration par réduction successive.*

Quand l'expression différentielle à intégrer est de la forme $[f(x)]^n\,dx$, ou, plus généralement, de la forme $[\varphi(x)]^n\,[\psi(x)]^m\,dx$, l'intégration par parties fournit souvent des *formules de réduction* qui ramènent à intégrer des expressions différentielles semblables, mais dans lesquelles l'exposant n dans les expressions de la première forme, et l'un ou l'autre ou tous deux des exposants n et m dans les expressions de la seconde forme, sont diminués d'une ou de plusieurs unités.

En appliquant ces formules de réduction une ou plusieurs fois de suite, on parvient à intégrer certaines expressions différentielles — formes dont il s'agit — dans lesquelles n et m sont des nombres particuliers.

Exemple I.

$\int (\log x)^n \, dx.$

En posant $u = (\log x)^n$ et $dv = dx$, on trouve, immédiatement, la formule de réduction :

$$\int (\log x)^n \, dx = x (\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} \, dx.$$

Pour $n = 1$, on en tire

$$\int \log x \, . \, dx = x (\log x - 1) + C.$$

Pour $n = 2$,

$$\int (\log x)^2 \, dx = x \left[(\log x)^2 - 2 \log x + 2 \right] + C.$$

Pour $n = 3$,

$$\int (\log x)^3 \, dx = x \left[(\log x)^3 - 3 (\log x)^2 + 6 \log x - 6 \right] + C.$$

etc.

Et, en général,

$$\int (\log x)^n \, dx$$
$$= x \left[(\log x)^n - n (\log x)^{n-1} + n(n-1) (\log x)^{n-2} - \text{etc.} \right] + C.$$

Exemple II.

$\int x^n e^{ax} dx.$

Si l'on fait $u = x^n$ et $dv = e^{ac} \, dx$, on obtient la formule de réduction :

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \, e^{ax} dx.$$

Si $a = 1$ et $n = 1, 2, 3,$ etc., il vient généralement :

$$\int x^n e^x dx = e^x \left[x^n - n x^{n-1} + n(n-1) x^{n-2} - \text{etc.} \right] + C.$$

Exemple III.

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Posant $u = x^{n-1}$ et $dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, on obtient :

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (n-1)\int x^{n-2}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}(a^2 - x^2)\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2} + (n-1)\, a^2 \int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$-(n-1)\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

D'où, en transposant le dernier terme, réduisant et divisant par n,

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} a^2 \int \frac{x^{n-2}\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Telle est la formule de réduction.

Si n est pair, l'intégrale finale se réduit à

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin}\, \frac{x}{a};$$

si n est impair, elle se réduit à

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Pour $n = 2$, la formule donne :

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \text{arc sin}\, \frac{x}{a}\right) + \text{C}.$$

Pour $n = 3$,

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{3}(x^2 + 2a^2) + \text{C}.$$

Exemple IV.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

On a :

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2-x^2)\,dx}{(a^2+x^2)^n},$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Or, en posant $u = x$ et $dv = \dfrac{xdx}{(a^2+x^2)^n}$, on obtient :

$$\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{x}{(2n-2)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}};$$

donc, par substitution et réduction :

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

L'intégrale finale se réduit à $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a}$.

Quand $a = 1$, la formule devient :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

et l'intégrale finale se réduit à $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x$.

Sous cette forme ou sous la précédente, cette formule de réduction est excessivement importante, car elle doit toujours être employée, nous le verrons au chapitre suivant, dans le cas le plus difficile de l'intégration des fractions rationnelles.

Nous engageons donc les élèves à la retenir de mémoire,

et faisons chose utile en présentant ce qu'elle donne pour $n=2$, $n=3$, $n=4$.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^2} + \frac{3}{4.2}\frac{x}{a^4(a^2+x^2)}$$
$$+ \frac{3}{4.2}\cdot\frac{1}{a^5}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^4} = \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{a^2(a^2+x^2)^3} + \frac{5}{6.4}\frac{x}{a^4(a^2+x^2)^2}$$
$$+ \frac{5.3}{6.4.2}\frac{x}{a^6(a^2+x^2)} + \frac{5.3}{6.4.2}\frac{1}{a^7}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{a} + C.$$

Quand $a=1$,

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4.2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{4.2}\operatorname{arc\,tang} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{1}{6}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^3} + \frac{5}{6.4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{5.3}{6\ 4.2}\frac{x}{1+x^2}$$
$$+ \frac{5.3}{6.4.2}\operatorname{arc\,tang} x + C.$$

Exemple V.

$$\int \frac{x^m dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Faisant $u = x^{m-1}$ et $dv = \dfrac{xdx}{(a^2+x^2)^n}$, on obtient immédiatement

$$\int \frac{x^m dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x^{m-1}}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{m-1}{2n-2}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

Pour $m = 2$ et $n = 3$,

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^3} = -\frac{1}{4} \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$$

et, en substituant ce qu'on a trouvé pour $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$ dans l'exemple précédent,

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(a^2 + x^2)^2} + \frac{x}{4 \cdot 2a^2(a^2 + x^2)}$$
$$+ \frac{1}{4 \cdot 2} \frac{1}{a^3} \text{arc tang} \frac{x}{a} + C.$$

Exemple VI.

$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$. ($m$ et n étant des nombres entiers, positifs ou négatifs.)

Posant $u = \cos^{n-1} x$ et $dv = \sin^m x \cos x \, dx$, on trouve :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx \quad . \quad . \quad (1)$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$
$$- \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx.$$

Transposant le dernier terme, réduisant et divisant par le coefficient de $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, il vient :

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}$$
$$+ \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx. \quad . \quad . \quad (2)$$

Si l'on eut posé $u = \sin^{m-1} x$ et $dv = \cos^n x \sin x\, dx$, on aurait trouvé d'abord

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx. \quad . \quad (3)$$

et, en remplaçant $\cos^{n+2} x$ par $\cos^n x\,(1 - \sin^2 x)$,

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx \quad . \quad . \quad (4)$$

Des formules (2) et (4), on tire aisément :

$$\int \sin^m x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\, dx. \quad (5)$$

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx. \quad . \quad (6)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\sin^{m-2} x} \quad . \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}. \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} = -\frac{\sin^{m-1} x}{(m-n)\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\sin^{m-2} x\, dx}{\cos^n x} \quad (9)$$

$$\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^n x} = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\sin^m x\, dx}{\cos^{n-2} x} \quad (10)$$

$$\int \frac{\cos^n x\, dx}{\sin^m x} = \frac{\cos^{n-1} x}{(n-m)\sin^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} x\, dx}{\sin^m x} \quad (11)$$

$$\int \frac{\cos^n x\, dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x\, dx}{\sin^{m-2} x} \quad (12)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}$$
$$+ \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x} \quad . \quad . \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}$$
$$+ \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} \quad . \quad . \quad (14)$$

De la formule (3), en remplaçant n par $-m$, et de la formule (1), en remplaçant m par $-n$, on tire immédiatement :

$$\int \operatorname{tang}^m x \, dx = \frac{1}{m-1} \operatorname{tang}^{m-1} x - \int \operatorname{tang}^{m-2} x \, dx. \quad . \quad (15)$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} x - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \, dx \, . \, . \quad (16)$$

Exercices.

1. $\int \frac{e^{ax} dx}{x^n}$.

Posant $u = e^{ax}$, on obtient :

$$\int \frac{e^{ax} dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{e^{ax} dx}{x^{n-1}}.$$

Pour $n = 4$ et $a = 1$,

$$\int \frac{e^x dx}{x^4} = -\frac{e^x}{6x^3}(x^2 + x + 2) + \frac{1}{6} \int \frac{e^x dx}{x}.$$

D'ailleurs, on verra au dernier chapitre que

$$\int \frac{e^x dx}{x} = C + \log x + x + \frac{x^2}{1.2^2} + \frac{x^3}{1.2.3^2} + \text{etc.}$$

2. $\int x^m (\log x)^n\, dx.$

Faisant $u = (\log x)^n$, on trouve :

$$\int x^m (\log x)^n\, dx = \frac{x^{m+1}(\log x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m (\log x)^{n-1}\, dx.$$

Pour $m = 2$ et $n = 2$,

$$\int x^2 (\log x)^2\, dx = \frac{x^3}{3}\left[(\log x)^2 - \frac{2}{3}\log x + \frac{2}{3^2}\right] + C.$$

3. $\int \sin^2 x\, dx,\quad \int \sin^3 x\, dx,\quad \int \sin^4 x\, dx,$

et

$$\int \cos^2 x\, dx,\quad \int \cos^3 x\, dx,\quad \int \cos^4 x\, dx.$$

Les formules de réduction (5) et (6) de l'exemple VI donnent :

$$\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{2}(\sin x \cos x - x) + C,$$

$$\int \sin^3 x\, dx = -\frac{\cos x}{3}(\sin^2 x + 2) + C,$$

$$\int \sin^4 x\, dx = -\frac{\cos x}{4}\left(\sin^3 x + \frac{3}{2}\sin x\right) + \frac{3x}{8} + C,$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + C,$$

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{\sin x}{3}(\cos^2 x + 2) + C,$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{\sin x}{4}\left(\cos^3 x + \frac{3}{2}\cos x\right) + \frac{3x}{8} + C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x},\quad \int \frac{dx}{\sin^4 x},\quad \int \frac{dx}{\cos^5 x},\quad \int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

Les formules (7) et (8) de l'exemple VI fournissent :

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log \operatorname{tang}\frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{\cos x}{3\sin^3 x} - \frac{2}{3}\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{\sin x}{4}\left(\frac{1}{\cos^4 x} + \frac{3}{2}\frac{1}{\cos^2 x}\right) + \frac{3}{8}\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin x}{5}\left(\frac{1}{\cos^5 x} + \frac{4}{3}\frac{1}{\cos^3 x}\right) + \frac{8}{15}\operatorname{tang} x + C.$$

5. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx$, $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx$, $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^6 x}$ et $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

Formules (9) et (10) de l'exemple VI :

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dx = -\frac{\sin x}{3}(\sin^2 x + 3) + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}dx = -\frac{1}{3\cos x}(\sin^4 x + 4\sin^2 x - 8) + C,$$

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^6 x} = \frac{\sin^2 x}{5}\left(\frac{1}{\cos^5 x} + \frac{1}{\cos^3 x}\right) + \frac{1}{5\cos x} + C,$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \frac{\sin^2 x}{3\cos^3 x} - \frac{2}{3\cos x} + C.$$

6. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$, $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$, $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}$, $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^5 x}$.

Formules (11) et (12) de l'exemple VI :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}dx = \frac{\cos^2 x}{2}\log \sin x + C,$$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx = -\left(\frac{\cos^3 x}{\sin x} + \frac{3}{2}\sin x\cos x + \frac{3}{2}x\right) + C,$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx = -\left(\frac{\cos^4 x}{2\sin^2 x} + \cos^2 x + 2\log\sin x\right) + C,$$

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos^2 x}{4}\left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) + C.$$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$
et

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x \cos^2 x}.$$

Formules (13) et (14) de l'exemple VI :

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = -\frac{1}{2\sin^2 x} + \log\operatorname{tang} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \log\operatorname{tang}\frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x} = \frac{1}{2\sin x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 3\right) + \frac{3}{2}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x \cos^2 x} = -\frac{1}{5\cos x}\left(\frac{1}{\sin^5 x} + \frac{2}{\sin^3 x} + \frac{8}{\sin x}\right)$$

$$+ \frac{16}{5}\operatorname{tang} x + C.$$

8. $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$, $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$, $\int \sin^4 x \cos^3 x\,dx$, $\int \sin^5 x \cos^5 x\,dx$.

Formules (2) et (4) de l'exemple VI :

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx = -\frac{\cos^3 x}{5}\left(\sin^2 x + \frac{2}{3}\right) + C,$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{\sin^3 x \cos x}{2}\left(\frac{\cos^2 x}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{16}(\sin x \cos x - x) + C,$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \frac{\sin^5 x}{7}\left(\cos^2 x + \frac{2}{5}\right) + C,$$

$$\int \sin^5 x \cos^5 x\, dx = \frac{\sin^6 x}{10}\left(\cos^4 x + \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{1}{6}\right) + C.$$

9. $\int \text{tang}^2 x\, dx$, $\int \text{tang}^3 x\, dx$, $\int \text{tang}^4 x\, dx$,

et

$\int \text{cotg}^2 x\, dx$, $\int \text{cotg}^3 x\, dx$, $\int \text{cotg}^4 x\, dx$.

Formules (15) et (16) de l'exemple VI :

$$\int \text{tang}^2 x\, dx = \text{tang}\, x - x + C.$$

$$\int \text{tang}^3 x\, dx = \frac{\text{tang}^2 x}{2} + \log \cos x + C.$$

$$\int \text{tang}^4 x\, dx = \frac{\text{tang}^3 x}{3} - \text{tang}\, x + x + C.$$

$$\int \text{cotg}^2 x\, dx = -(\text{cotg}\, x + x) + C.$$

$$\int \text{cotg}^3 x\, dx = -\left(\frac{\text{cotg}^2 x}{2} + \log \sin x\right) + C.$$

$$\int \text{cotg}^4 x\, dx = -\left(\frac{\text{cotg}^3 x}{3} - \text{cotg}\, x - x\right) + C.$$

10. $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a + bx}}$.

En posant $u = x^n$, on trouve d'abord :

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x^n}{b}\sqrt{a+bx} - \frac{2n}{b}\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\,.\,dx,$$

et, en dédoublant l'intégrale finale après l'avoir écrite $\int \frac{x^{n-1}(a+bx)}{\sqrt{a+bx}}dx$, on obtient :

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2x^n\sqrt{a+bx}}{(2n+1)b} - \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a+bx}}.$$

Pour $n=1$,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = 2\sqrt{a+bx}\left(\frac{x}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right) + C.$$

Pour $n=2$,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} = 2\sqrt{a+bx}\left(\frac{x^2}{5b} - \frac{4}{5.3}\frac{ax}{b^2} + \frac{4.2}{5.3}\frac{a^2}{b^3}\right) + C.$$

Pour $n=3$,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a+bx}}$$

$$= 2\sqrt{a+bx}\left(\frac{x^3}{7b} - \frac{6}{7.5}\frac{ax^2}{b^2} + \frac{6.4}{7.5.3}\frac{a^2x}{b^3} - \frac{6.4.2}{7.5.3}\frac{a^3}{b^4}\right) + C.$$

11. $\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}$.

Posant $u = x^n$ et opérant comme dans l'exercice précédent, on obtient la formule de réduction :

$$\int \frac{x^n dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3x^n(a+bx)^{\frac{2}{3}}}{(3n+2)b} - \frac{3n}{3n+2}\cdot\frac{a}{b}\int \frac{x^{n-1}dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}}.$$

Pour $n=1$,

$$\int \frac{xdx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}} = 3(a+bx)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x}{5b} - \frac{3}{5.2}\frac{a}{b^2}\right) + C.$$

Pour $n = 2$,

$$\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}} = 3(a+bx)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2}{8b} - \frac{6}{8.5}\frac{ax}{b^2} + \frac{6.3}{8.5.2}\frac{a^2}{b^3}\right) + C.$$

Pour $n = 3$,

$$\int \frac{x^3 dx}{(a+bx)^{\frac{1}{3}}} = 3(a+bx)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^3}{11b} - \frac{9}{11.8}\frac{ax^2}{b^2} + \frac{9.6}{11.8.5}\frac{a^2x}{b^3}\right.$$
$$\left. - \frac{9.6.3}{11.8.5.2}\frac{a^3}{b^4}\right) + C.$$

12. $\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx$, n étant impair.

Posant $u = (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}$, on trouve d'abord :

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx = x(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} + n\int x^2(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx$$

et en dédoublant l'intégrale finale après l'avoir écrite :

$$\int \left[a^2 - (a^2 - x^2)\right](a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx,$$

il vient :

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (a^2 - x^2)^{\frac{n}{2}-1} dx.$$

Pour $n = 1$,

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Pour $n = 3$,

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4.2}a^2x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{3}{4.2}a^4 \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Pour $n = 5$,

$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{6} + \frac{5}{6.4} a^2 x (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{5.3}{6.4.2} a^4 x (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{5.3}{6.4.2} a^6 \text{ arc sin } \frac{x}{a} + \text{C}.$$

13. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}}$, n étant impair.

On a :

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + x^2 - x^2)\, dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Or, en posant $u = x$,

$$\int \frac{x^2 dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} = - \frac{x}{(n-2)(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1}}$$

$$+ \frac{1}{n-2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1}}.$$

Substituant, on obtient :

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{x}{(n-2)\, a^2 (a^2 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1}}$$

$$+ \frac{n-3}{n-2} \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2} - 1}}.$$

Pour $n = 3$,

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2 (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + \text{C}.$$

4

Pour $n = 5$,

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x}{3a^2(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{a^2 + x^2} + \frac{2}{a^2}\right) + \mathrm{C}.$$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}}$.

On a :

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{x\,dx}{x^{n+1}\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Si l'on pose $u = \dfrac{1}{x^{n+1}}$, on trouve d'abord :

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^{n+1}} + (n + 1)\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^{n+2}}\,dx.$$

Dédoublant l'intégrale finale, après en avoir multiplié les deux termes par $\sqrt{x^2 - 1}$,

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^{n+1}} + (x + 1)\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$- (n + 1)\int \frac{dx}{x^{n+2}\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Transposant le dernier terme, réduisant, puis changeant n en $n - 2$, il vient :

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{(n - 1)\,x^{n-1}} + \frac{n - 2}{n - 1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Pour $n = 2$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + \mathrm{C}.$$

Pour $n = 3$,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + \frac{1}{2}\text{arc séc}\, x + \text{C}.$$

Pour $n = 4$,

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{3x}\left(\frac{1}{x^2}+2\right) + \text{C}.$$

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$.

Opérant comme dans l'exercice précédent, on trouve la formule de réduction :

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{n-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}}.$$

Pour $n = 2$,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \text{C}.$$

Pour $n = 3$,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{2x^2} - \frac{1}{2}\log\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} + \text{C}.$$

Pour $n = 4$,

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{3x}\left(\frac{1}{x^2}-2\right) + \text{C}.$$

16. $\displaystyle\int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

Faisons $x = 2az^2$; il vient :

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = 2(2a)^n\int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Or, la formule de réduction de l'exemple III, en y remplaçant x par z, a par 1 et n par $2n$, fournit :

$$\int \frac{z^{2n}dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{z^{2n-1}\sqrt{1-z^2}}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{z^{2n-2}\,dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

d'où, en multipliant les deux membres par $2(2a)^n$, puis remplaçant z par $\sqrt{\frac{x}{2a}}$:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{2ax-x^2}}{n} + \frac{2n-1}{n}a\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Pour $n=1$,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a.\text{ arc sin vers }\frac{x}{a} + \text{C}.$$

Pour $n=2$,

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2}\left(\frac{x}{2}+\frac{3a}{2}\right)$$

$$+\frac{3a^2}{2}\text{ arc sin vers }\frac{x}{a} + \text{C}.$$

Pour $n=3$,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{5ax}{3.2}+\frac{5.3a^2}{3.2}\right)$$

$$+\frac{5.3a^3}{3.2}\text{ arc sin vers }\frac{x}{a} + \text{C}.$$

17. $\int x^n \cos x\, dx$.

Une première intégration, en posant $u = x^n$, donne

$$\int x^n \cos x\, dx = x^n \sin x - n\int x^{n-1} \sin x\, dx.$$

Une seconde intégration, en faisant $u = x^{n-1}$, fournit :

$$\int x^{n-1} \sin x\, dx = -x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x\, dx.$$

D'où, par substitution :

$$\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x + nx^{n-1}\cos x$$
$$- n(n-1)\int x^{n-2}\cos x\,dx.$$

Pour $n = 1$,

$$\int x \cos x\,dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Pour $n = 2$,

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Pour $n = 3$,

$$\int x^3 \cos x\,dx = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C.$$

18. $\int x^n \sin x\,dx.$

En procédant comme dans l'exercice qui précède, on trouve :

$$\int x^n \sin x\,dx = - x^n \cos x + nx^{n-1}\sin x$$
$$- n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\,dx.$$

Pour $n = 1$,

$$\int x \sin x\,dx = - x \cos x + \sin x + C.$$

Pour $n = 2$,

$$\int x^2 \sin x\,dx = - x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Pour $n = 3$,

$$\int x^3 \sin x\,dx = - x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x$$
$$- 6 \sin x + C.$$

19. $\int e^{ax} \cos^n x\,dx.$

On a :

$$\int e^{ax} \cos^n x\,dx = \int e^{ax} \cos^{n-2}x(1 - \sin^2 x)\,dx$$
$$= \int e^{ax} \cos^{n-2}x\,dx - \int e^{ax} \cos^{n-2}x \sin^2 x\,dx.$$

Posant $u = e^{ax} \sin x$, on trouve :

$$\int e^{ax} \cos^{n-2} x \sin^2 x = -\frac{1}{n-1} e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x$$

$$+\frac{a}{n-1}\int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x\, dx + \frac{1}{n-1}\int e^{ax} \cos^n x\, dx;$$

puis, faisant $u = e^{ax}$, on obtient :

$$\int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x\, dx = -\frac{1}{n} e^{ax} \cos^n x + \frac{a}{n}\int e^{ax} \cos^n x\, dx.$$

Par substitution, réduction et division par le coefficient de $\int e^{ax} \cos^n x\, dx$, on a :

$$\int e^{ax} \cos^n x\, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x (a \cos x + n \sin x)}{a^2 + n^2}$$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax} \cos^{n-2} x\, dx.$$

Pour $n = 1$,

$$\int e^{ax} \cos x\, dx = \frac{e^{ax}(a \cos x + \sin x)}{a^2+1} + C.$$

Pour $n = 2$,

$$\int e^{ax} \cos^2 x\, dx = \frac{e^{ax} \cos x (a \cos x + 2 \sin x)}{a^2+4} + \frac{2e^{ax}}{a(a^2+4)} + C.$$

Pour $n = 3$,

$$\int e^{ax} \cos^3 x\, dx = \frac{e^{ax} \cos^2 x (a \cos x + 3 \sin x)}{a^2+9}$$

$$+\frac{6e^{ax}(a \cos x + \sin x)}{(a^2+1)(a^2+9)} + C.$$

20. $\int e^{ax} \sin^n x\, dx.$

En opérant comme dans l'exercice qui précède, on trouve :

$$\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x(a\sin x - n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx.$$

Pour $n=1$,

$$\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin x - \cos x)}{a^2+1} + C.$$

Pour $n=2$,

$$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}\sin x(a\sin x - 2\cos x)}{a^2+4} + \frac{2e^{ax}}{a(a^2+4)} + C.$$

Pour $n=3$,

$$\int e^{ax}\sin^3 x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^2 x(a\sin x - 3\cos x)}{a^2+9} + \frac{6e^{ax}(a\sin x - \cos x)}{(a^2+1)(a^2+9)} + C.$$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$.

Évidemment,

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \int \frac{\sin^2 x\,dx}{(a+b\cos x)^n} + \int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a+b\cos x)^n}.$$

Posant $u=\sin x$, on trouve :

$$\int \frac{\sin^2 x\,dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{1}{(n-1)b}\frac{\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)b}\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}.$$

D'autre part,

$$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a+b\cos x)^n} = -\frac{1}{b^2}\int \frac{(a^2 - a^2 - b^2\cos^2 x)\,dx}{(a+b\cos x)^n}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} - \frac{1}{b^2}\int \frac{(a - b\cos x)\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$= \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} - \frac{a}{b^2}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{b}\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}},$$

et

$$\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} = \frac{1}{b}\int \frac{(a - a + b\cos x)\,dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$= -\frac{a}{b}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

D'où, par substitution, réduction et division par le coefficient de $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$:

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{-b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+ \frac{(2n-3)\,a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$- \frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

Pour $n = 2$,

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{-b\sin x}{(a^2-b^2)(a+b\cos x)}$$

$$+ \frac{a}{a^2-b^2}\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$$

Si l'on suppose $a > b$, il vient :

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = -\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b\sin x}{a+b\cos x}\right.$$

$$\left.-\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)\right]+C;$$

et, pour $a < b$,

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b\sin x}{a+b\cos x}\right.$$

$$\left.-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tang}\frac{1}{2}x-\sqrt{b+a}}\right]+C.$$

(Voir l'exercice 37, chapitre II.)

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n}$.

En procédant comme dans l'exercice qui précède, on obtient :

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n} = \frac{b\cos x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\sin x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\sin x)^{n-1}}$$

$$-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{dx}{(a+b\sin x)^{n-2}}.$$

Pour $n=2$,

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^2} = \frac{b\cos x}{(a^2-b^2)(a+b\sin x)} + \frac{a}{a^2-b^2}\int\frac{dx}{a+b\sin x}.$$

Si l'on suppose, en outre, $a > b$, on trouve :

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^2} = \frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{b\cos x}{a+b\sin x}\right.$$

$$\left.+\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a\operatorname{tang}\frac{1}{2}x+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right]+C;$$

et, pour $a < b$,

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^2} = -\frac{1}{b^2-a^2}\left[\frac{b\cos x}{a+b\sin x}\right.$$

$$\left. + \frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}} \log \frac{a \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + b - \sqrt{b^2-a^2}}{a \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + b + \sqrt{b^2-a^2}}\right] + C.$$

(Voir l'exercice 40, chapitre II.)

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

Dans le dernier chapitre des *Exercices méthodiques de calcul différentiel*, on a rappelé que $\frac{f(x)}{F(x)}$ représentant une fraction dont les termes sont des fonctions entières et rationnelles de x (le degré du numérateur étant moindre que celui du dénominateur), cette fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ pouvait toujours se décomposer en fractions plus simples de l'une des quatre formes :

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \quad \frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Dans ces fractions plus simples, a représente telle racine réelle de l'équation

$$F(x) = 0;$$

α et β, les coefficients de tel couple de racines imaginaires conjuguées de la même équation; n, un nombre entier positif; A et B, des constantes que le calcul différentiel détermine.

L'intégration des expressions différentielles de la forme $\frac{f(x)}{F(x)}\,dx$, $f(x)$ et $F(x)$ étant, bien entendu, des fonctions

entières et rationnelles de x, sera donc ramenée à l'intégration des différentielles

$$\frac{A\,dx}{x-a},\quad \frac{A\,dx}{(x-a)^n},\quad \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},\quad \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Or,

1° $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)} = A\log(x-a) + C.$

2° $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$ (Voir chapitre II, section II, exemple II.)

3°. $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ devient, en posant $x-\alpha = z$,

$$\int \frac{(Az+A\alpha+B)\,dz}{z^2+\beta^2}$$

et

$$\int \frac{(Az+A\alpha+B)\,dz}{z^2+\beta^2} = A\int \frac{z\,dz}{z^2+\beta^2} + (A\alpha+B)\int \frac{dz}{z^2+\beta^2}$$

$$= \frac{A}{2}\log(z^2+\beta^2) + \frac{A\alpha+B}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{\beta}.$$

Donc, en remplaçant z par $x-\alpha$:

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\log\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$$

$$+ \frac{A\alpha+B}{\beta}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

4° Si l'on pose $x-\alpha = z$, on obtient d'abord :

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int \frac{(Az+A\alpha+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

$$= A\int \frac{z\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} + (A\alpha+B)\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

D'autre part,

$$A\int\frac{zdz}{(z^2+\beta^2)^n}=-\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{A}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$$ (chapitre II, section II, exemple III) et $(A\alpha+B)\cdot\dfrac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}$ s'intégrera au moyen de la formule de réduction trouvée, chapitre III, section II, exemple IV.

Par addition et, après avoir remplacé z par $x-\alpha$, on obtiendra le résultat cherché.

Nota. — En multipliant par dx chacune des fractions rationnelles que, dans le dernier chapitre des *Exercices méthodiques de calcul différentiel*, on trouvera décomposées en fractions plus simples, on formera les expressions différentielles dont l'intégration est développée dans les exemples suivants, et celles que nous donnons à intégrer comme exercices.

Exemple I.

$$\int\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}dx.$$

On a trouvé :

$$\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}=\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-4}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int\frac{12x^2-70x+98}{x^3-9x^2+26x-24}dx &= 3\int\frac{dx}{x-2}+4\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{x-4}\\ &= 3\log(x-2)+4\log(x-3)\\ &\qquad +5\log(x-4)+\log C\\ &= \log C(x-2)^3(x-3)^4(x-4)^5.\end{aligned}$$

Exemple II.

$$\int\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}dx.$$

On a obtenu :

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}=\frac{4}{(x-1)^6}+\frac{8}{(x-1)^5}+\frac{8}{(x-1)^4}+\frac{4}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

De là,

$$\int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}dx = 4\int \frac{dx}{(x-1)^6} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^5} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^4}$$

$$+ 4\int \frac{dx}{(x-1)^3} + \int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= -\frac{4}{5(x-1)^5} - \frac{8}{4(x-1)^4} - \frac{8}{3(x-1)^3}$$

$$-\frac{4}{2(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + C$$

$$= -\frac{15x^4 - 30x^3 + 40x^2 - 20x + 7}{15(x-1)^5} + C.$$

Exemple III.

$$\int \frac{6x^2 + 25x - 9}{x^4 - 14x^3 + 107x^2 - 422x + 850}dx.$$

On a trouvé :

$$\frac{6x^2 + 25x - 9}{x^4 - 14x^3 + 107x^2 - 422x + 850} = \frac{-3x+1}{(x-3)^2+25} + \frac{3x-1}{(x-4)^2+9}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{6x^2 + 25x - 9}{x^4 - 14x^3 + 107x^2 - 422x + 850}dx$$

$$= \int \frac{-3x+1}{(x-3)^2+25}dx + \int \frac{3x-1}{(x-4)^2+9}dx$$

$$= -\frac{3}{2}\log\left[(x-3)^2+25\right] - \frac{8}{5}\text{arc tang}\frac{x-3}{5}$$

$$+ \frac{3}{2}\log\left[(x-4)^2+9\right] + \frac{11}{3}\text{arc tang}\frac{x-4}{3} + C$$

$$= \frac{3}{2}\log\frac{(x-4)^2+9}{(x-3)^2+25} + \frac{11}{3}\text{arc tang}\frac{x-4}{3}$$

$$-\frac{8}{5}\text{arc tang}\frac{x-3}{5} + C.$$

Exemple IV.

$$\int \frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

La décomposition a donné :

$$\frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{2x-1}{x^2+1}.$$

Donc

$$\int \frac{x(2x^2 - x + 5)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{3x+1}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{2x-1}{x^2+1}\,dx$$

$$= 3\int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{2xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\frac{3}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\text{arc tang}\, x$$

$$+ \log(x^2+1) - \text{arc tang}\, x + \log C$$

$$= \frac{x-3}{2(x^2+1)} + \log C(x^2+1) - \frac{1}{2}\text{arc tang}\, x.$$

Exemple V.

$$\int \frac{x^2dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}.$$

Du résultat trouvé par la décomposition de $\frac{x^2}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$ en fractions plus simples, on tire :

$$\int \frac{x^2dx}{(x+a)^2(x^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+a)^2} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} + \frac{1}{2a}\int \frac{xdx}{x^2+a^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x+a)} - \frac{1}{2a}\log(x+a) + \frac{1}{4a}\log(x^2+a^2) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x+a} - \frac{a}{x+a}\right] + C.$$

Exemple VI.

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx.$$

Le résultat de la décomposition de $\dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}$ permet d'écrire tout de suite :

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2} + \frac{11}{8}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{40}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$-\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{5}\int\frac{7x+4}{x^2+1}\,dx.$$

Or,

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4x^2},\quad \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{3}{4x},$$

$$\frac{11}{8}\int\frac{dx}{x} = \frac{11}{8}\log x,\quad \frac{1}{40}\int\frac{dx}{x-2} = \frac{1}{40}\log(x-2),$$

$$-\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\,\text{arc tang}\,x,$$

et

$$-\frac{1}{5}\int\frac{7x+4}{x^2+1}\,dx = -\frac{7}{10}\log(x^2+1) - \frac{4}{5}\,\text{arc tang}\,x.$$

Par addition et réduction, on obtient :

$$\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{40}\log\frac{x^{55}(x-2)}{(x^2+1)^{28}} - \frac{13}{10}\,\text{arc tang}\,x$$

$$-\frac{5x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{4x^2(x^2+1)} + C.$$

Nota. — On voit que l'intégration des différentielles $\dfrac{f(x)}{F(x)}dx$ fournit généralement des fonctions rationnelles

de x, des logarithmes et des arcs-tangente. Pour additionner ceux-ci, quand l'expression de la somme sera jugée assez simple, on fera usage de la formule connue :

$$\text{arc tang } a \pm \text{arc tang } b = \text{arc tang} \frac{a \pm b}{1 \mp ab}.$$

Exercices.

1. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2 + (a+b)x + ab}.$

$$S = x + \frac{1}{a-b}\left[b^2 \log(x+b) - a^2 \log(x+a)\right] + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{a(7x^2 - 28ax + 24a^2)}{x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3} dx.$

$$S = a \log\left[C(x-a)(x-2a)^2(x-4a)^4\right].$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 + \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)x^2 + \left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right)x + \sqrt{abc}}.$

$$S = \frac{1}{\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)} \log\left(x+\sqrt{a}\right)$$

$$+ \frac{1}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{b}\right)} \log\left(x+\sqrt{b}\right)$$

$$+ \frac{1}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)} \log\left(x+\sqrt{c}\right) + C.$$

4. $\displaystyle\int \frac{360x^2 - 126x + 17}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1} dx.$

$$S = \log C\left[(2x-1)^4 (3x-1)^5 (4x-1)^6\right].$$

5. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 1}{(x+2)^3} dx.$

$$S = \frac{8x+13}{2(x+2)^2} + \log C(x+2).$$

6. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x\sqrt{a} + 3}{(x+\sqrt{a})^5}\,dx.$

$$S = C - \frac{2x^2 + 3}{4(x+\sqrt{a})^4}.$$

7. $\displaystyle\int \frac{(a+bx)^m}{(a-bx)^n}\,dx.$

$$S = C + \frac{(2a)^m}{b(n-1)(a-bx)^{n-1}} - \frac{m}{1}\,\frac{(2a)^{m-1}}{b(n-2)(a-bx)^{n-2}}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{(2a)^{m-2}}{b(n-3)(a-bx)^{n-3}} - \text{etc.}$$

8. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 + (a+b)x^2 + ab}.$

$$S = \frac{1}{2(b-a)}\log\frac{x^2+a}{x^2+b} + C.$$

9. $\displaystyle\int \frac{2(x^2+1)\,dx}{x^4+x^2+1}.$

$$S = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} + C.$$

10. $\displaystyle\int \frac{12x^5 - 7x^2 + 2}{4x^6 + 21x^4 + 21x^2 + 4}\,dx.$

$$S = \frac{2}{15}\log\frac{(x^2+1)^5}{(x^2+4)^4\,(x^2+\frac{1}{4})} + \frac{1}{3}\,\text{arc tang}\,\frac{x(7x^2+3)}{4x^6+15x^4+9x^2+2} + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{16(x^2+4)\,dx}{(4x^2+4x+17)^2}.$

$$S = \frac{2x+33}{16(4x^2+4x+17)} + \frac{33}{64}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{4} + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 4x^3 + 7x - 4}{(x^2+1)^3}\, dx.$

$$S = \frac{1}{2}\left[\log(x^2+1) - 3 \text{ arc tang } x - \frac{3x^3 + 2x^2 + 5x + 4}{(x^2+1)^2}\right] + C.$$

13. $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 1}{(x^2+x+1)^3}\, dx.$

$$S = \frac{4x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{3(x^2+x+1)^2} + \frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ arc tang } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{(5x^2 - 7x)\, dx}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}.$

$$S = \log C \frac{(x-2)^2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}.$$

15. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 1}{x^6 + x^4}\, dx.$

$$S = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \text{arc tang } x + C.$$

16. $\displaystyle\int \frac{15x^5 + 5x^4 + 58x^3 + x^2 + 37x - 16}{x^6 + 4x^4 - x^2 - 4}\, dx.$

$$S = \log\left[C(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}(x-1)^5(x+1)^6\right] + 2 \text{ arc tang } \frac{3x}{2-x^2}.$$

17. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(x^2-1)^3}.$

$$S = \frac{1}{16}\left[\log \frac{x+1}{x-1} - \frac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}\right] + C.$$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^4-1)}.$

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\text{ arc tang } x + C.$$

19. $\int \frac{x^2+6x-1}{(x-1)^3(x+3)^3}dx.$

$$S=\frac{1}{64}\left[\frac{11}{4}\log\frac{x+3}{x-1}-\frac{11x^3+33x^2-19x+23}{(x-1)^2(x+3)^2}\right]+C.$$

20. $\int \frac{x^2dx}{x^3+(a+2b)x^2+b(2a+b)x+ab^2}.$

$$S=\frac{1}{(a-b)^2}\left[a^2\log(a+x)+b(b-2a)\log(b+x)\right]$$

$$-\frac{b^2}{(a-b)(b+x)}+C.$$

21. $\int \frac{dx}{x^3(1-x^2)^2(1+x)}.$

$$S=\frac{3x^2-x-1}{2x^2(1-x)}+\frac{1}{4}\log\frac{x^8}{(1-x)^7(1+x)}+C.$$

22. $\int \frac{4x^2(x^4-x^2-1)\,dx}{x^8-2x^6-x^4-2x^2-1}.$

$$S=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{x^2-x\sqrt{5}+1}{x^2+x\sqrt{5}+1}+C.$$

23. $\int \frac{x^3dx}{x^6-2x^5+x^4+x^2-2x+1}.$

$$S=-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\log(x-1)-\frac{1+\sqrt{2}}{8}\log(x^2-x\sqrt{2}+1)$$

$$-\frac{1+\sqrt{2}}{4}\,\text{arc tang}\,(x\sqrt{2}-1)-\frac{1-\sqrt{2}}{8}\log(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

$$+\frac{1-\sqrt{2}}{4}\,\text{arc tang}\,(x\sqrt{2}+1)+C.$$

24. $\displaystyle\int \frac{5x^2 - 2x^3 - 3x + 1}{x^6 - x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 3x - 1}\,dx.$

$$S = \frac{2x-1}{3(x^2 - x + 1)} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\,\text{arc tang}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}}\log\frac{(2x+1)\sqrt{5} - 5}{(2x+1)\sqrt{5} + 5} + C.$$

25. $\displaystyle\int \frac{5x^5 - 10x^4 + 121x^2 + 197x - 287}{(x^2 - 5x + 8)^2(x^2 + 7)}.$

$$S = \frac{8x - 27}{7(x^2 - 5x + 8)} - \frac{89\sqrt{7}}{49}\,\text{arc tang}\,\frac{2x-5}{\sqrt{7}}$$

$$+ \frac{1}{2}\log\frac{x^2 + 7}{x^2 - 5x + 8} + C.$$

26. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{a + bx^3}.$

$$S = \frac{1}{6bR}\left[\log\frac{x^2 - Rx + R^2}{(x+R)^2} + 2\sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{2x - R}{R\sqrt{3}}\right] + C.$$

Dans ce résultat, $R = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$.

27. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{a + bx^4}.$

$$S = \frac{1}{4bR\sqrt{2}}\left[\log\frac{x^2 - Rx\sqrt{2} + R^2}{x^2 + Rx\sqrt{2} + R^2} + 2\,\text{arc tang}\,\frac{Rx\sqrt{2}}{R^2 - x^2}\right] + C$$

Dans ce résultat, $R = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}$.

28. $\int \frac{x^3 dx}{a + bx^5}$.

$$S = \frac{1}{5bR}\left[\begin{array}{l} \cos\frac{\pi}{5}\log\left(x^2 - 2Rx\cos\frac{\pi}{5} + R^2\right) \\ + \cos\frac{3\pi}{5}\log\left(x^2 - 2Rx\cos\frac{3\pi}{5} + R^2\right) \\ + 2\sin\frac{\pi}{5}\operatorname{arc\,tang}\frac{x - R\cos\frac{\pi}{5}}{R\sin\frac{\pi}{5}} \\ + 2\frac{\cos^2\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x - R\cos\frac{3\pi}{5}}{R\sin\frac{3\pi}{5}} \\ - \log(x + R) \end{array}\right] + C.$$

Dans ce résultat, $R = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{5}}$.

29. $\int \frac{dx}{a + bx^2 + cx^4}$.

Si l'on a $b^2 - 4ac > 0$, en posant :

$$\frac{b}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} = M,$$

et

$$\frac{b}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} = N,$$

on trouve :

$$S = \frac{1}{c(N - M)}\left[\frac{1}{\sqrt{M}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{M}} - \frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{\sqrt{N}}\right] + C.$$

Mais si l'on a $b^2 - 4ac < 0$, en posant :

$$\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} = \mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{2\sqrt{ac}} = -\cos\alpha,$$

on obtient :

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4c\mathrm{R}^3}\left[\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{arc\,tang}\,\frac{2\,\mathrm{R}x\sin\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{R}^2 - x^2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\log\frac{x^2 + 2\mathrm{R}x\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{R}^2}{x^2 - 2\mathrm{R}x\cos\frac{\alpha}{2} + \mathrm{R}^2}\right] + \mathrm{C}.$$

30. $\displaystyle\int \frac{x^{m-1}}{x^n - 1}\,dx.$

Si n est pair,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l}\log(x-1) + (-1)^m\log(x+1) \\ + \displaystyle\sum_1^{\frac{n}{2}-1}{}_k\left[\cos km\theta\log(x^2 - 2x\cos k\theta + 1)\right. \\ \left. - 2\sin km\theta\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{x - \cos k\theta}{\sin k\theta}\right]\end{array}\right\} + \mathrm{C}.$$

Si n est impair,

$$\mathrm{S} = \frac{1}{n}\left\{\begin{array}{l}\log(x-1) + \displaystyle\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_k\left[\cos km\theta\log(x^2 - 2x\cos k\theta + 1)\right. \\ \left. \qquad - 2\sin km\theta\,\mathrm{arc\,tang}\,\dfrac{x - \cos k\theta}{\sin k\theta}\right]\end{array}\right\} + \mathrm{C}.$$

Dans ces résultats, $\theta = \dfrac{2\pi}{n}$.

CHAPITRE V.

RATIONALISATION (*).

Point de règles générales pour intégrer les expressions différentielles irrationnelles.

Transformer, par substitution, certaines expressions en différentielles rationnelles, puis les intégrer sous leur nouvelle forme, tel est le but restreint et l'unique procédé.

Rappelons quelques règles particulières données dans les cours.

Première règle. — Toute expression différentielle qui ne renferme point d'autres irrationnelles que des puissances fractionnaires de la variable x, peut se rationaliser en posant $x = z^k$, k étant le moindre multiple des dénominateurs des exposants fractionnaires. C'est la règle qui conduit à l'intégration dite *des monômes irrationnels*.

Comme application, voir l'exemple VI, chapitre II, section II.

Deuxième règle. — Toute expression de la forme $x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$, dans laquelle m, n, p et q sont des nombres entiers (n et q positifs, m et p positifs ou négatifs), peut être rationalisée :

1° Si $\dfrac{m+1}{n}$ est un nombre entier, positif ou négatif, en posant :

$$a + bx^n = z^q.$$

(*) Mot anglais que nous nous sommes permis de franciser, afin d'abréger le discours. Dans le même but, nous avons fait emploi du verbe *rationaliser* avec cette signification : rendre rationnelle telle expression mathématique qui renferme des radicaux. É. B.

2° Si $\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}$ est un nombre entier, positif ou négatif, en posant :

$$a+bx^n=x^nz^q.$$

C'est la règle qui conduit à l'intégration *des différentielles binômes*.

Exemple I.

$$\int\frac{x^5dx}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

On a $\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{2}=3$; posons donc $a+bx^2=z^2$.

D'où $(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}=z$, $x^6=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^3$ et $x^5dx=\left(\frac{z^2-a}{b}\right)^2\frac{zdz}{b}$.

Substituant, il vient :

$$\int\frac{x^5dx}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{b^3}\int(z^2-a)^2dz=\frac{z}{b^3}\left(\frac{z^4}{5}-\frac{2az^2}{3}+a^2\right)+C;$$

et en remplaçant z par $(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$,

$$\int\frac{x^5dx}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}{b^3}\left[\frac{(a+bx^2)^2}{5}-\frac{2a(a+bx^2)}{3}+a^2\right]+C.$$

Exemple II.

$$\int\frac{x^6dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\frac{m+1}{n}+\frac{p}{q}=\frac{6+1}{2}-\frac{3}{2}=2.$$

Posons donc : $1+x^2=x^2z^2$; on trouvera :

$$x^6=\frac{1}{(z^2-1)^3},\quad dx=-\frac{zdz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}},\quad (1+x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{z^3}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}};$$

et, par substitution :

$$\int \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{dz}{z^8(z^2-1)^3}.$$

Intégrant par la méthode des fractions rationnelles, on obtient :

$$-\int \frac{dz}{z^2(z^2-1)^3} = -\frac{15z^4 - 25z^2 + 8}{8z(z^2-1)^2} + \frac{15}{16}\log\frac{z+1}{z-1} + C,$$

et, en remplaçant z par $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$,

$$\int \frac{x^6 dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8}\left[\frac{x(2x^4 - 5x^2 - 15)}{\sqrt{1+x^2}} + 15\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right] + C.$$

Nota. — Si les exposants m et n étaient fractionnaires, on poserait au préalable $x = u^k$, k étant le moindre multiple de leurs dénominateurs, et l'on obtiendrait une expression en u à laquelle on pourrait appliquer la règle.

Si n était négatif, on poserait d'abord $x = \frac{1}{u}$ et l'on aurait :

$$x^m(a + bx^{-n})\,dx = u^{-m-2}(a + bu^n)\,du,$$

expression en u, semblable, mais dans laquelle n est positif.

Troisième règle. — Toute expression de la forme $f(X, \sqrt{a+bx})\,dx$, X représentant, comme dans les règles suivantes, une fonction rationnelle de x, peut être rationalisée en posant, soit $a + bx = z^2$, soit $a + bx = \frac{1}{z^2}$.

Exemple.

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{a-bx}}.$$

Posant $a - bx = z^2$, on obtient :

$$\sqrt{a-bx} = z, \quad dx = -\frac{2zdz}{b} \quad \text{et} \quad a + bx = 2a - z^2;$$

et, par substitution,

$$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{a-bx}} = \frac{2}{b}\int \frac{dz}{z^2-2a} = \frac{1}{b\sqrt{2a}} \log \frac{z-\sqrt{2a}}{z+\sqrt{2a}}.$$

$$= \frac{1}{b\sqrt{2a}} \log \frac{\sqrt{a-bx}-\sqrt{2a}}{\sqrt{a-bx}+\sqrt{2a}} + \text{C}.$$

Quatrième règle. — Toute expression de la forme $f(\text{X}, \sqrt{a+bx^n})\,dx$, peut être rationalisée en posant $x^n = y$, puis en appliquant la troisième règle.

Exemple.

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Posant $x^2 = y$, d'où $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$, on a :

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{dy}{2\sqrt{y}}}{(a^2+y)\sqrt{a^2-y}}.$$

Faisant ensuite $\frac{1}{a^2-y} = z^2$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-y}} = z, \quad a^2+y = \frac{2a^2z^2-1}{z^2} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \frac{dz}{z^2\sqrt{a^2z^2-1}},$$

il vient par substitution :

$$\int \frac{\frac{dy}{2\sqrt{y}}}{(a^2+y)\sqrt{a^2-y}} = \int \frac{zdz}{(2a^2z^2-1)\sqrt{a^2z^2-1}}.$$

Enfin, posant $a^2z^2 - 1 = u^2$, d'où

$$zdz = \frac{udu}{a^2}, \quad \sqrt{a^2z^2 - 1} = u \quad \text{et} \quad 2a^2z^2 - 1 = 2u^2 + 1,$$

on obtient :

$$\int \frac{zdz}{(2a^2z^2 - 1)\sqrt{a^2z^2 - 1}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{du}{u^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2\sqrt{2}} \text{ arc tang } u\sqrt{2}.$$

D'où, facilement :

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{2}} \text{ arc tang } \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

Cinquième règle. — Toute différentielle de la forme $f(X, \sqrt{a + bx \pm x^2})\,dx$ peut être rationalisée :

1° Si le coefficient de x^2 est $+ 1$, en posant

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x.$$

2° Si le coefficient de x^2 est $- 1$ et si a est positif, en posant $\sqrt{a + bx - x^2} = xz - \sqrt{a}$.

Si le coefficient de x^2 est $- 1$ et si a est négatif, en posant $\sqrt{- a + bx - x^2} = z(\alpha - x)$, α étant la plus grande des racines réelles de l'équation $x^2 - bx + a = 0$.

3° Que le coeffieient de x^2 soit $+ 1$ ou $- 1$, en remplaçant

$$\sqrt{a + bx + x^2} \text{ par } \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4a - b^2}{4}}$$

et

$$\sqrt{a + bx - x^2} \text{ par } \sqrt{\frac{4a + b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}$$

et appliquant la quatrième règle.

Nota I. — Quand $b=0$, $\sqrt{a+bx\pm x^2}$ devient $\sqrt{a\pm x^2}$. Donc les deux premières parties de la cinquième règle s'appliquent aux expressions de la forme $f(X, \sqrt{a\pm x^2})\,dx$, expressions que l'on peut aussi rationaliser au moyen de la quatrième règle.

Nota II. — Si l'expression à rationaliser par la cinquième règle était de la forme $f(X, \sqrt{a+bx\pm cx^2})\,dx$, on remplacerait $\sqrt{a+bx\pm cx^2}$ par $\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x\pm x^2}$.

Exemple I.

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$$

Première solution.

Si l'on pose $\sqrt{1+x+x^2}=z-x$, on trouve :

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}=2\int\frac{dz}{z(z+2)}=\log\frac{z}{z+2}+\log C,$$

et, en remplaçant z par $\sqrt{1+x+x^2}+x$,

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}=\log C.\frac{\sqrt{1+x+x^2}+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x+2}.$$

Deuxième solution.

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}.$$

Faisant $x+\frac{1}{2}=y$, on obtient

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=4\int\frac{dy}{(1+2y)\sqrt{3+4y^2}}.$$

Posant ensuite $\sqrt{3+4y^2} = z - 2y$, on trouve :

$$4\int \frac{dy}{(1+2y)\sqrt{3+4y^2}} = 4\int \frac{dz}{(z+1)^2 - 4} = \log \frac{z-1}{z+3} + \log C.$$

Or $z = 2\sqrt{x^2+x+1} + 2x + 1$; la substitution donne donc

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}} = \log C \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+x}{\sqrt{1+x+x^2}+x+2}.$$

Exemple II.

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$$

Faisant $\sqrt{1+x-x^2} = xz - 1$, on a :

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2\int \frac{dz}{z^2+2z+2}$$

$$= -2\int \frac{dz}{(z+1)^2+1} = -2 \text{ arc tang}(z+1) + C;$$

et, en remplaçant z par $\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1}{x}$,

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = -2 \text{ arc tang} \frac{\sqrt{1+x-x^2}+x+1}{x} + C.$$

Exemple III.

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

Les racines de l'équation $x^2 - 4x + 3$ sont 3 et 1.

Posons donc

$$\sqrt{-3+4x-x^2}=\sqrt{(3-x)(x-1)}=z(3-x),$$

et l'on trouve :

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}=2\int\frac{dz}{z^2-1}=\log\frac{z-1}{z+1}+\log C$$

et, en remplaçant z par $\sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$,

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}=\log\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}}+\log C$$

$$=\log C\frac{1-\sqrt{-3+4x-x^2}}{x-2}.$$

En dehors de quelques règles particulières, comme celles qui précèdent, certaines expressions différentielles en x peuvent se rationaliser en établissant entre x et une nouvelle variable z des relations que des recherches et l'habitude de l'analyse peuvent seules faire découvrir.

Exemple 1.

$$\int\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

En posant $z=\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$, on obtient :

$$dz=\sqrt{2}\,\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\,dx,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{1-x^2}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Par voie de multiplication, on a donc :

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \sqrt{2}\,\frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

D'où

$$\int \frac{(1+x^2)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}{1-x^2} + C.$$

Exemple II.

$$\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}.$$

Posant $z = \dfrac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}}$, on trouve :

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}\left[(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

et

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}{\sqrt{1+x^4}}.$$

D'où, après multiplication,

$$\int \frac{dx}{(1+x^4)\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang}\, z$$

$$= \text{arc tang}\,\frac{x}{\sqrt{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}-x^2}} + C.$$

Ces deux exemples, comme les trois derniers des exercices qui suivent, sont tirés d'Euler.

Exercices.

1. $$\int \frac{x^3(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}+1}\,dx.$$

Posant $1+x^4=z^4$, on obtient :

$$S=\frac{(1+x^4)^{\frac{3}{4}}}{3}-(1+x^4)^{\frac{1}{4}}+\text{arc tang}\,(1+x^4)^{\frac{1}{4}}+C.$$

2. $$\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

$$S=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$S=\frac{2}{b^3}(a+bx)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{(a+bx)^2}{5}-\frac{2a(a+bx)}{3}+a^2\right]+C.$$

4. $$\int x(a+bx)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

$$S=\frac{2}{b^2}(a+bx)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{a+bx}{5}-\frac{a}{3}\right)+C.$$

5. $$\int \frac{x^3dx}{(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

$$S=\frac{(x^2-1)(1+2x^2)^{\frac{1}{2}}}{6}+C.$$

6. $$\int x^3(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

$$S=2(1+x)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(1+x)^3}{9}-\frac{3(1+x)^2}{7}+\frac{3(1+x)}{5}-\frac{1}{3}\right]+C.$$

7. $\int \frac{dx}{x^4(x-1)^{\frac{1}{2}}}$.

Après avoir posé $x - 1 = z^2$, on obtient :

$$\int \frac{dx}{x^4(x-1)^{\frac{1}{2}}} = 2\int \frac{dz}{(1+z^2)^4}$$

et, en appliquant la formule donnée dans l'exemple IV de l'intégration par réduction successive,

$$S = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{x-1}}{x}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{5.3}{4.2}\right) + \frac{5.3}{6.4}\text{ arc tang}\sqrt{x-1} + C.$$

8. $\int x^5(1+x^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$.

$$S = (1+x^3)^{\frac{4}{3}}\left(\frac{1+x^3}{7} - \frac{1}{4}\right) + C.$$

9. $\int \frac{dx}{x(1+x)^{\frac{3}{4}}}$.

$$S = \log C\frac{(1+x)^{\frac{1}{4}} - 1}{(1+x)^{\frac{1}{4}} + 1} - 2\text{ arc tang}(1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

10. $\int x^2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

$$S = \frac{1}{8}\left[x(1+2x^2)\sqrt{1+x^2} + \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\right] + C.$$

11. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

$$S = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \text{arc cos}\,x + C.$$

12. $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$.

$$S = \frac{x(3a+2bx^2)}{3a^2(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} + C.$$

13. $\int \frac{xdx}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$.

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2(1+x^3)^{\frac{1}{3}}+x}{x\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log\left[(1+x^3)^{\frac{1}{3}} - x\right] + C.$$

14. $\int \frac{dx}{\left(\frac{2a}{b}+x\right)\left(a+bx\right)^{\frac{1}{2}}}$.

$$S = \frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{arc\,tang} \left(\frac{a+bx}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + C.$$

15. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x+5}\,dx$.

$$S = 2\sqrt{1+x} - 4 \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{1+x}}{2} + C.$$

16. $\int \frac{x^2dx}{(x^3-1)(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}$.

Cette expression peut s'écrire $\int \frac{x^2dx}{(x^6-1)(x^3+1)^{\frac{1}{2}}}$, et, en posant $x^3+1=z^2$, on obtient :

$$S = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^3-1}}\right] + C.$$

17. $$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

$$S = \frac{1}{a^2\sqrt{2}} \log \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

18. $$\int \frac{dx}{(x + 4)\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$$

$$S = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}} + C.$$

19. $$\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 - x - x^2}}.$$

$$S = \log C\left[\frac{3 + x - 2\sqrt{1 - x - x^2}}{1 + x}\right].$$

20. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + b^2x^n}}.$$

Multipliant les deux termes par x^{n-1}, puis posant $a^2 + b^2x^n = z^2$, on trouve :

$$S = \frac{2}{an} \log \frac{\sqrt{a^2 + b^2x^n} - a}{b\sqrt{x^n}} + C.$$

21. $$\int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{a^2 - b^2x^{2n}}}.$$

Multipliant les deux termes par x^n, puis faisant $a^2 - b^2x^{2n} = z^2$, on obtient :

$$S = \frac{1}{nb} \arccos \frac{\sqrt{a^2 - b^2x^{2n}}}{a} + C.$$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

On pourrait employer la quatrième règle, mais si l'on pose

$$z = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

et que l'on divise l'expression de dz par celle de $1+z^2$, on trouve :

$$\int \frac{dx}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang } z$$
$$= \text{arc tang } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

23. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+2x^2}\,dx$.

Posant $z = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ et divisant l'expression de dz par celle de $1 - z^4$, on obtient :

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+2x^2}\,dx = \int \frac{dz}{1-z^4} = \frac{1}{2}\,\text{arc tang } z - \frac{1}{4}\log\frac{z-1}{z+1}$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{arc tang } \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{4}\log\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} + C.$$

24. $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)\,dx}{(1+x^2)(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}$.

Faisant $z = \dfrac{x\sqrt{2}}{1+x^2}$ et divisant l'expression de dz par celle de $\sqrt{1-z^2}$, on trouve :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc sin } \frac{x\sqrt{2}}{1+x^2} + C.$$

25. $\displaystyle\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$

Si l'on pose $x+\sqrt{1+x^2}=z^n$, on obtient :

$$S=n\int z^{m-1}\,dz=\frac{n}{m}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}}+C.$$

26. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}.$

Posant $z=\dfrac{x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}$, on trouve :

$$S=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{4}\log\frac{x-(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}{x+(2x^2-1)^{\frac{1}{4}}}+C.$$

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES DÉFINIES.

Soit $f(x)dx$ une expression différentielle et $F(x)+C$ son intégrale générale, *indéfinie,* trouvée par l'une des méthodes précédentes, de sorte que

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C.$$

Si l'intégrale est *définie,* c'est-à-dire prise entre deux *limites :* la *limite inférieure* x_0 et la *limite supérieure* X (x_0 et X étant deux valeurs particulières de x), on l'indique ainsi :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx;$$

et il s'agit de déterminer de telles intégrales.

Si la fonction $f(x)$ est continue, pour toutes les valeurs de x, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on démontre que

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = F(X) - F(x_0); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

c'est-à-dire que l'intégrale définie s'obtient en substituant successivement à x, dans l'intégrale $F(x)$, les valeurs particulières X et x_0, et en soustrayant les deux résultats.

Rappelons qu'au moyen de cette règle, on démontre facilement deux propriétés générales des intégrales définies :

1° Quand on renverse l'ordre des limites, l'intégrale change de signe;

2° Si x_0, x_1, x_2 .... x_{n-1}, X sont des valeurs de x telles que $f(x)$ reste continue quand x varie d'une de ces valeurs à la suivante, on a :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

Quant à la discontinuité de la fonction $f(x)$, elle comprend trois cas :

Premier cas.

Si $f(x)$ devient infinie à la limite inférieure, qu'on ait $f(x_0) = \infty$, l'intégrale définie se trouve par la formule

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ε représentant une quantité infiniment petite.

Deuxième cas.

Si $f(x)$ devient infinie à la limite supérieure X, qu'on ait $f(X) = \infty$, l'intégrale s'obtient par la formule :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{x_0}^{X-\varepsilon} f(x)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Troisième cas.

Si $f(x)$ devient infinie pour une valeur de x, $x = x_1$, comprise entre x_0 et X, la formule suivante, dans laquelle ε et ε' sont des quantités infiniment petites, fournit l'intégrale définie :

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim\left[\int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon'}^{X} f(x)\,dx.\right] \quad (4)$$

Exemple I.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

La fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ étant continue pour toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, on emploiera la formule (1), et comme

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, x + C,$$

on obtiendra :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\, \infty - \text{arc tang}\, 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple II.

$$\int_0^{1} \frac{1-x^m}{1-x}\,dx.$$

On a :

$$\frac{1-x^m}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1}.$$

Donc la fonction $\dfrac{1-x^m}{1-x}$ est continue pour toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$.

D'ailleurs,

$$\int \frac{1-x^m}{1-x}\,dx = \int (1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})\,dx$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^m}{m} + \text{C}.$$

Donc l'emploi de la formule (1) donne :

$$\int_0^1 \frac{1-x^m}{1-x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}.$$

Exemple III.

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx.\ (a \text{ étant positif}).$$

La fonction e^{-ax} est continue pour toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, et

$$\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax} + \text{C}.$$

La formule (1) donne donc

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-\infty} - \left(-\frac{1}{a}e^0\right) = \frac{1}{a}.$$

Exemple IV.

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx\ (a > 0 \text{ et } n \text{ entier et } > 0).$$

La fonction $x^n e^{-ax}$ est continue pour toutes les valeurs de x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$.

D'autre part, l'intégration par parties fournit :

$$\int x^n e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}x^n e^{-ax} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{-ax}\,dx.$$

Le terme $-\frac{1}{a}x^n e^{-ax}$ étant nul pour $x = 0$ et $x = \infty$, on a donc

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\,dx.$$

En faisant successivement $n = 1, 2, 3 \ldots.$ dans cette formule de réduction, et observant que pour $x = 1$, $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$, d'après l'exemple précédent, on obtient :

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}.$$

Exemple V.

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour $x = -1$, la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$. Il faut donc employer la formule (2); elle donne :

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \int_{-1+\varepsilon}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

D'ailleurs,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + \text{C}.$$

Donc

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \left[\text{arc sin}\,\frac{1}{2}\sqrt{2} - \text{arc sin}\,(\varepsilon - 1)\right],$$

et, pour $\varepsilon = 0$,

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Exemple VI.

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 - x^2}.$$

Pour $x = a$, la fonction $\frac{1}{a^2 - x^2} = \infty$. Il faut donc faire emploi de la formule (3), ce qui conduit à

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 - x^2} = \lim \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{a^2 - x^2}.$$

Or,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a + x}{a - x} + C.$$

Par conséquent,

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \lim \left[\log \frac{2a - \varepsilon}{\varepsilon} - \log \frac{a}{a}\right]$$

$$= \frac{1}{2a} \lim \left[\log \left(\frac{2a}{\varepsilon} - 1\right)\right];$$

et, pour $\varepsilon = 0$,

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 - x^2} = \infty.$$

Exemple VII.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} \text{ (}n\text{ entier et } > 1\text{).}$$

Pour $x = 0$, valeur de x comprise entre celles des limites, $x = -1$ et $x = +1$, la fonction $\frac{1}{x^n} = \infty$. Donc il faut avoir recours à la formule (4), ce qui fournit :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} = \lim \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} + \int_{+\varepsilon'}^{+1} \frac{dx}{x^n}\right];$$

et puisque

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C,$$

il vient :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \lim \left[\frac{1}{(-\varepsilon)^{n-1}} - \frac{1}{(-1)^{n-1}} + \frac{1}{(+1)^{n-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{n-1}} \right].$$

Si n est pair,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \lim \left[-\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} + 1 + 1 - \frac{1}{\varepsilon'^{n-1}} \right];$$

et, pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon' = 0$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \left[-\infty + 2 - \infty \right].$$

Si n est impair,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \lim \left[+\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - 1 + 1 - \frac{1}{\varepsilon'^{n-1}} \right];$$

et, pour $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon' = 0$,

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{n-1} \left[\infty - \infty \right].$$

Donc quand n est pair, l'intégrale définie proposée est infinie, et quand n est impair, elle est indéterminée.

Exercices.

1. $\int^1 x^m dx \quad (m + 1 > 0).$

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}.$$

2. $\int_0^a \frac{a^3 - x^3}{a - x} dx.$

$$\int_0^a \frac{a^3 - x^3}{a - x} dx = \frac{11a^3}{6}.$$

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a}.$$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}.$

Pour $x = 0$, $\frac{1}{\sin x} = \infty$, et l'emploi de la formule (2) fera trouver :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \infty.$$

5. $\int_{-1}^{+1} a^{-mx} dx.$ $(m > 0)$.

$$\int_{-1}^{+1} a^{-mx} dx = \frac{a^m - a^{-m}}{m \log a}.$$

6. $\int_{-\pi}^{+\pi} x \sin x \, dx.$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} x \sin x dx = 2\pi.$$

7. $\int_0^a \sqrt{\frac{a + x}{a - x}} dx.$

Pour $x = a$, $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \infty$. Donc par l'emploi de la formule (3)

$$\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = a\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

8. $$\int_\alpha^{\alpha'} \frac{dx}{\sqrt{a^2+bx-x^2}}$$

(α' et α étant les racines de l'équation $x^2 - bx - a^2$ et α' la plus grande).

On a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+bx-x^2}} = 2 \text{ arc tang} \sqrt{\frac{x-\alpha}{\alpha'-x}} + C,$$

et, par suite,

$$\int_\alpha^{\alpha'} \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \pi.$$

9. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

On a trouvé (exemple IV, chapitre III, section II)

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

Pour $x = 0$ et pour $x = \infty$, le premier terme du second membre est nul; donc

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

En faisant successivement $n = 2$, $n = 3$, etc., dans cette égalité, on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

10. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{\cos^2 x} = \infty$. L'emploi de la formule (4) conduit à

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = +\infty - 2 - \infty.$$

Donc la valeur de l'intégrale proposée est indéterminée.

11. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ et $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$.

En opérant comme dans l'exemple IV, chapitre III, section I, on obtient :

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx - a\cos bx),$$

et

$$\int e^{-ax}\sin bx\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\cos bx + a\sin bx);$$

puis, facilement,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$

et

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

12. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$.

$\frac{1}{x} = \infty$ pour $x = 0$, valeur de x comprise entre $x = -1$ et $x = +1$.

L'emploi de la formule (4) conduit à

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim (\log \varepsilon - \log \varepsilon') = \lim \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

Or le rapport $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ est arbitraire, donc la valeur de l'intégrale proposée est indéterminée.

13. $\int_0^1 \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (m = 1, 2, 3 \ldots)$.

On a obtenu (exemple III, chapitre III, section II)

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{a^2 - x^2}}{n} + \frac{n-1}{n} a^2 \int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

D'où

$$\int \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{2m-1}\sqrt{1-x^2}}{2m} + \frac{2m-1}{2m} \int \frac{x^{2m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et

$$\int \frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{2m}\sqrt{1-x^2}}{2m+1} + \frac{2m}{2m+1} \int \frac{x^{2m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Le premier terme du second membre de chacune des deux égalités précédentes étant nul pour $x = 0$ et $x = 1$, on a :

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2m-1}{2m} \int_0^1 \frac{x^{2m-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2m}{2m+1}\int_0^1 \frac{x^{2m-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En faisant successivement $m = 1, 2, 3\ldots$ etc., on trouve :

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots(2m)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

et

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2.4.6\ldots(2m)}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx.$

Si dans la formule (5) de l'exemple VI, chapitre III, section II, on remplace successivement m par $2m$ et par $2m+1$, on trouve

$$\int \sin^{2m} x\,dx = -\frac{\sin^{2m-1} x \cos x}{2m} + \frac{2m-1}{2m}\int \sin^{2m-2} x\,dx,$$

et

$$\int \sin^{2m+1} x\,dx = -\frac{\sin^{2m} x\cos x}{2m+1} + \frac{2m}{2m+1}\int \sin^{2m-1} x\,dx.$$

Le premier terme du second membre de chacune des deux formules qui précèdent s'évanouissant pour les valeurs de x, $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{2m-1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-2} x\,dx$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2m}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\,dx.$$

Faisant successivement $m = 1, 2, 3$, etc., dans ces deux dernières égalités, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2.4.6\ldots(2m)}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

Nota. — Nous n'avons rappelé des intégrales définies que les tout premiers éléments : ceux nécessaires dans les applications des quatre chapitres suivants.

Les théories données dans les cours exigeront d'autres exemples développés; les élèves en trouveront de nombreux dans l'ouvrage de A. Meyer : *Exposé élémentaire de la théorie des intégrales définies.*

Quant à des exercices présentés dans leur énoncé et leur solution finale seulement, les *Tables d'intégrales définies* de D. Bierens de Haan en contiennent plus de trois mille.

CHAPITRE VII.

QUADRATURE DES SURFACES PLANES.

Soit $y = f(x)$ (*) l'équation d'une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires. L'aire A, comprise entre un arc

(*) Les fonctions dont il s'agit dans ce chapitre et dans les trois suivants sont supposées *continues* dans les limites où on les considère.

Quant aux courbes dont il est question dans ce Recueil, nous avons supposé, comme dans les *Exercices méthodiques de calcul différentiel,* que le lecteur les connaissait, ou pouvait les connaître, par les traités de géométrie analytique.

quelconque de cette courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées des extrémités de l'arc, a pour expression

$$A = \int_{x_0}^{x} y\,dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

x^0, x désignant les abscisses des extrémités de l'arc.

Si les axes sont obliques et que θ soit leur angle, $A = \sin\theta \int_{x_0}^{x} y\,dx$.

Soit $r = f(t)$ l'équation d'une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires. L'aire A, comprise entre un arc quelconque de cette courbe et les rayons vecteurs menés aux extrémités de l'arc, a pour expression

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2 dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

t_0, t désignant les angles que font les rayons vecteurs avec l'axe polaire.

Exemple.

1° Soit l'ellipse dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

L'emploi de la formule (1) donne

$$A = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Or

$$\frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{ab}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{b}{2a}x\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Si l'on prend l'intégrale de $x_0 = 0$ à $x = a$, on obtient pour le quart de l'ellipse

$$\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi ab}{4}.$$

Donc, pour l'ellipse entière, πab.

2° L'équation de l'ellipse, en coordonnées polaires, quand le centre est pris pour pôle et le grand axe pour axe polaire, est

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

L'emploi de la formule (2) fournit :

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{a^2b^2\,dt}{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t},$$

ou

$$A = \frac{b^2}{2}\int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{b^2}{a^2} + \operatorname{tang}^2 t}.$$

Or

$$\frac{b^2}{2}\int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\frac{b^2}{a^2} + \operatorname{tang}^2 t} = \frac{ab}{2} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a \operatorname{tang} t}{b}\right) + C.$$

En prenant l'intégrale de $t_0 = 0$ à $t = \frac{\pi}{2}$, on obtient pour le quart de l'aire

$$\frac{\pi ab}{4},$$

comme précédemment.

Exercices.

1. L'équation polaire du cercle est $r = a$.
La formule (2) donne rapidement :

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi a^2}{4} \text{ pour le quart de l'aire.}$$

2. Soit la parabole ordinaire dont l'équation est $y^2 = 2px$.
On trouve :

$$A = \int_0^x \sqrt{2px}\, dx = \frac{2}{3} xy.$$

D'où $\frac{4}{3} = xy$ pour la portion de l'aire comprise entre le sommet et la perpendiculaire à l'axe menée à une distance x quelconque de l'origine.

3. Spirale d'Archimède dont l'équation est $r = at$.
On obtient :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^t a^2t^2\, dt = \frac{1}{6} a^2t^3.$$

4. Hyperbole rapportée à ses asymptotes.
L'équation de la courbe est $xy = k^2$ et, θ désignant l'angle des asymptotes,

$$A = \sin\theta \int_{x_0}^x k^2 \frac{dx}{x} = k^2 \sin\theta \log\frac{x}{x_0}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, $\sin\theta = 1$. Et si l'on suppose en outre $k = 1$ et $x_0 = 1$,

$$A = \log x.$$

C'est pourquoi les logarithmes népériens sont aussi appelés *logarithmes hyperboliques*.

5. Spirale logarithmique dont l'équation est $r = ae^{mt}$, a désignant une ligne et m un nombre.

On obtient :

$$A = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} a^2 e^{2mt} dt = \frac{r^2 - r_0^2}{4m}.$$

6. Lemniscate.

L'équation de la courbe est $r^2 = a^2 \cos 2t$, et l'on trouve :

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2t dt = \frac{a^2}{4}.$$

L'aire totale des deux branches est donc a^2.

7. Hyperbole dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ou $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$,

$$A = \frac{b}{a}\int_{a}^{x} \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Or

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} + C.$$

D'où

$$A = \frac{b}{2a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{ab}{2}\log\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

et puisque

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{ay}{b},$$

$$A = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\log\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

8. Rosace à quatre branches.

L'équation de la courbe est $r = a \sin 2t$, et l'on obtient pour l'aire de la branche comprise dans l'angle YOX :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^2 2t \, dt.$$

Or (exercice 3, chapitre III, section II)

$$\int \sin^2 2t \, dt = -\frac{1}{4}(\sin 2t \cos 2t - 2t) + C.$$

D'où

$$A = \frac{\pi a^2}{8}.$$

Les quatre branches ont donc pour aire totale $\frac{\pi a^2}{2}$. La moitié du cercle de rayon a qui contient la courbe.

9. Cissoïde de Dioclès.

La courbe (le diamètre du cercle générateur fixe étant $2a$) a pour équation

$$(2a - x) y^2 = x^3,$$

ou

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a - x}} = \frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Donc

$$A = \int_0^{2a} \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Mais (voir exercice 16, chapitre III, section II),

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = -\sqrt{2ax - x^2}\left(\frac{x}{2} + \frac{3a}{2}\right)$$
$$+ \frac{3a^2}{2} \text{ arc sin vers } \frac{x}{a} + C.$$

D'où

$$A = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

L'aire comprise entre les deux branches de la courbe et leur asymptote est donc $3\pi a^2$, ou trois fois l'aire du cercle générateur fixe.

10. Cycloïde.

L'équation différentielle de la courbe est $dx = \dfrac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}$, et l'on trouve, formule (1) :

$$A = \int_0^{2a} \frac{y^2 dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Cette intégrale, en y, étant la même que celle en x de l'exercice précédent, donne

$$A = \frac{3\pi a^2}{2},$$

trois fois l'aire du cercle générateur pour l'aire entière.

11. Chaînette.

L'équation différentielle de la courbe est $dx = \dfrac{ady}{\sqrt{y^2 - a^2}}$.

D'où

$$A = a \int_a^y \frac{ydy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = a\sqrt{y^2 - a^2}.$$

12. Conchoïde de Nicomède dont l'équation est $r = \dfrac{a}{\cos t} + b$ (fig. 1).

$$A = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{a}{\cos t} + b\right)^2 dt.$$

D'où

$$A = \frac{a^2}{2} \operatorname{tang} t + ab \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) + \frac{b^2}{2} t.$$

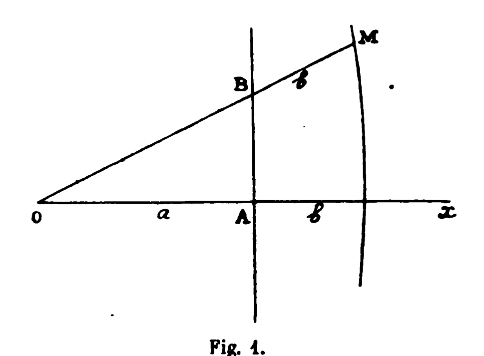


Fig. 1.

D'autre part, l'aire du triangle OAB $= \frac{a^2}{2} \operatorname{tang} t$.

Donc l'aire totale comprise entre la courbe et son asymptote est

$$2ab \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) + b^2 t.$$

13. Soit la straniera dont l'équation est $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ (Maria Agnesi).

$$A = 2a \int_0^{2a} \sqrt{\frac{2a - x}{x}}\, dx = 2a \int_0^{2a} \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}\, dx.$$

Or

$$2a \int \frac{2a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}\, dx = 2a \left(a \text{ arc sin vers } \frac{x}{a} + \sqrt{2ax - x^2}\right) + C.$$

D'où $$A = 2\pi a^2.$$

L'aire totale comprise entre la courbe et son asymptote est donc $4\pi a^2$.

14. Limaçon de Pascal (fig. 2).

Cherchons l'aire comprise dans la courbe OM'GM'', courbe dont l'équation est $r = a \cos t + b$.

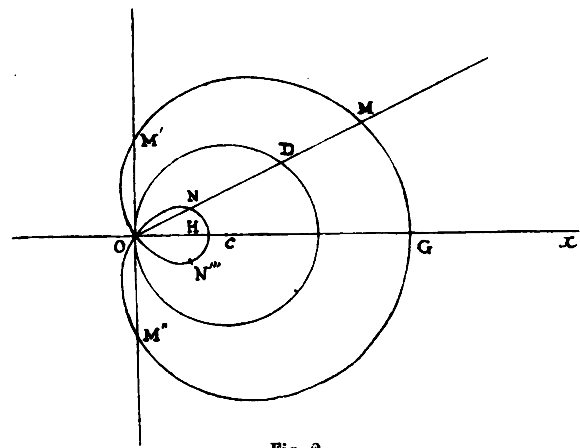


Fig. 2.

Pour obtenir la partie supérieure de cette aire, il suffira d'intégrer entre $t = 0$ et la valeur de t qui rend r nul. Cette valeur de t, fournie par l'équation, est arc cos $\left(-\frac{b}{a}\right)$; désignons-la par α, et l'on aura :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (a \cos t + b)^2 \, dt,$$

ou

$$A = \frac{a^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha + ab \sin \alpha + \frac{\alpha}{4}(a^2 + 2b^2).$$

Or

$$\cos \alpha = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Substituant, il vient :

$$A = \frac{3}{4} b \sqrt{a^2 - b^2} + \frac{1}{4} \alpha (a^2 + 2b^2).$$

L'aire entière est donc

$$\frac{1}{2}\left[(a^2+2b^2)\alpha+3b\sqrt{a^2-b^2}\right].$$

Pour obtenir l'aire comprise dans la courbe ONN‴, dont l'équation est $r=a\cos t-b$, il suffit de changer b en $-b$ et α en $\pi-\alpha$ dans le résultat précédent, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\left[(a^2+2b^2)(\pi-\alpha)-3b\sqrt{a^2-b^2}\right].$$

15. Folium de Descartes (fig. 3).

L'équation de la courbe est $y^3-3axy+x^3=0$, et celle de son asymptote, $y+x+a=0$.

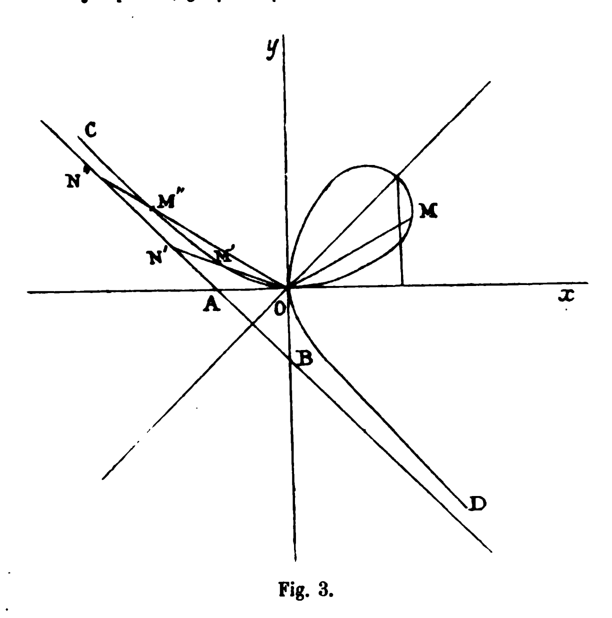


Fig. 3.

Si l'on pose $y=\theta x$, l'équation de la courbe devient $x=\frac{3a\theta}{1+\theta^3}$, et celle de l'asymptote, $x=-\frac{a}{1+\theta}$.

Cela posé, supposons que la courbe soit rapportée à des coordonnées polaires telles qu'on ait :

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} t = \theta, \quad \text{d'où} \quad dt = \cos^2 t \, d\theta;$$

et

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{d'où} \quad r^2 = \frac{x^2}{\cos^2 t}.$$

L'expression générale de l'aire sera

$$\frac{1}{2}\int r^2 dt = \frac{1}{2}\int x^2 d\theta = \frac{1}{2}\int \frac{9a^2\theta^2}{(1+\theta^3)^2}\, d\theta = \frac{3a^2}{2}\int \frac{3\theta^2 d\theta}{(1+\theta^3)^2}$$

$$= -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\theta^3} + \text{C},$$

et en intégrant entre $\theta = \operatorname{tang} o = 0$ et $\theta = \operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = \infty$, on obtient $\frac{3a^2}{2}$ pour l'aire de la boucle.

Pour trouver l'aire comprise entre la branche infinie OC, son asymptote et deux rayons vecteurs, remarquons que M′N′N″M″ est égal au triangle ON′N″ moins l'élément OM′M″ de l'aire du folium.

L'équation de l'asymptote étant $x = -\frac{a}{1+\theta}$, l'expression générale de l'aire du triangle ON′N″ est

$$\frac{1}{2}\int \frac{a^2}{(1+\theta)^2}\, d\theta = -\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\theta} + \text{C}.$$

De l'aire du triangle retranchant celle de la courbe, on obtient pour l'aire M′N′N″M″

$$\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{1+\theta^3} - \frac{1}{1+\theta}\right) = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{2-\theta}{1-\theta+\theta^2}.$$

En intégrant entre $\theta = \operatorname{tang}\frac{3\pi}{4} = -1$ et $\theta = \operatorname{tang}\pi = 0$, on trouve $\frac{a^2}{2}$.

On obtiendrait le même résultat pour l'aire comprise entre la branche infinie OD et son asymptote.

Et comme l'aire du triangle AOB est aussi $\frac{a^2}{2}$, l'aire totale comprise entre les branches infinies de la courbe et leur asymptote est $\frac{3a^2}{2}$; même aire que celle de la boucle.

Nota. — Si l'on eut transformé l'équation du folium et celle de son asymptote en posant $x = r \cos t$ et $y = r \sin t$, on aurait pu se servir de la formule $A = \frac{1}{2}\int r^2 dt$ pour trouver les mêmes résultats; mais le calcul eût été plus long.

16. Épicycloïde dont l'équation est $p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}$ (fig. 4).

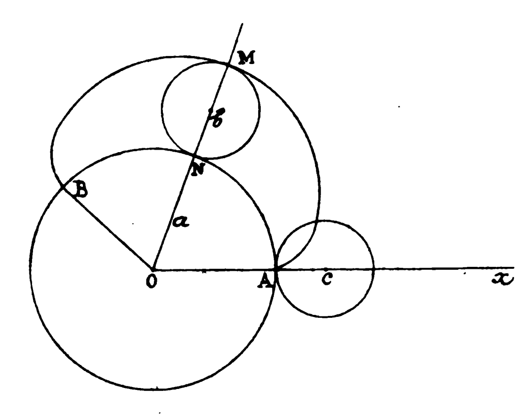


Fig. 4.

L'équation étant donnée en fonction du rayon vecteur r et de la perpendiculaire p menée du pôle sur la tangente, transformons d'abord l'expression générale de l'aire, $\frac{1}{2}\int r^2 dt$.

On sait que $p = \dfrac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}}$. Tirant de là dt et substituant, il vient :

$$\frac{1}{2}\int r^2\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{prdr}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

D'où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{r_0}^{r} \frac{prdr}{\sqrt{r^2 - p^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Or l'équation fournit

$$p = \frac{c\sqrt{r^2 - a^2}}{\sqrt{c^2 - a^2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{r^2 - p^2} = a\sqrt{\frac{c^2 - r^2}{c^2 - a^2}}.$$

Substituant dans la formule (3), puis intégrant de $r_0 = a$ à $r = c$, on trouve :

$$\mathrm{A} = \frac{c}{4a}(c^2 - a^2)\frac{\pi}{2}.$$

C'est la moitié de l'aire OAMB. L'aire entière est donc $\dfrac{c(c^2 - a^2)}{4a} \cdot \pi$, et en remplaçant c par $a + 2b$, on obtient :

$$\frac{b}{a}(a^2 + 3ab + 2b^2)\,\pi.$$

Si de cette aire on retranche celle du secteur OANB ou πab, on obtient pour l'aire comprise entre l'épicycloïde et le cercle fixe :

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a + 2b).$$

Si $b = a$, le cercle fixe et le cercle générateur égaux, la courbe devient la *cardioïde,* dont l'aire, d'après ce qui précède, est $6\pi a^2$.

17. Hypocycloïde (fig. 5).

L'équation de la courbe est la même que celle de l'épicycloïde, mais c, au lieu d'y représenter $a + 2b$, y représente $a - 2b$.

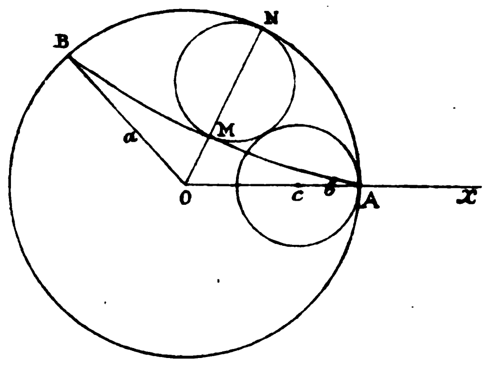


Fig. 5.

A cause de cette valeur de $c < a$, l'aire entière sera

$$\frac{c(a^2 - c^2)}{4a} \cdot \pi$$

ou, en remplaçant c par $a - 2b$,

$$\frac{b}{a}(a^2 - 3ab + 2b^2)\pi.$$

D'où l'aire comprise entre la courbe et le cercle fixe sera :

$$\frac{\pi b^2}{a}(3a - 2b).$$

Si $b = \frac{a}{4}$, l'expression $\frac{b}{a}(a^2 - 3ab + 2b^2)$ donne :

$$\frac{3}{32}\pi a^2.$$

C'est l'aire de l'hypocycloïde dont l'équation est

$$p^2 = \frac{a^2 - r^2}{3} \quad \text{ou} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \text{ (fig. 6).}$$

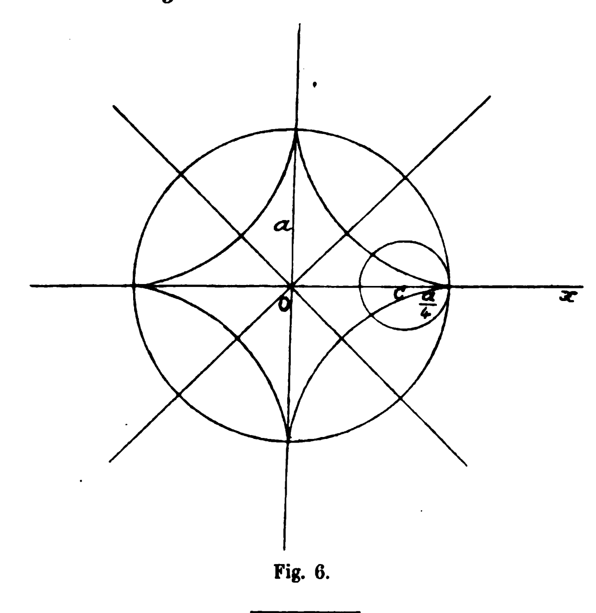


Fig. 6.

CHAPITRE VIII.

RECTIFICATION DES COURBES.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires. s représentant un arc de cette courbe, le calcul différentiel donne

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

D'où la formule de rectification :

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

x_0 et x désignant les abscisses des extrémités de l'arc.

Soit $f(r, t) = 0$ l'équation d'une courbe plane, rapportée à des coordonnées polaires; le calcul différentiel fournit :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2dt^2}.$$

D'où la formule :

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

t_0 et t étant les angles que forment les rayons vecteurs, menés aux extrémités de l'arc, avec l'axe polaire.

Soient $f(x, y, z) = 0$ et $F(x, y, z) = 0$ les équations simultanées d'une courbe gauche rapportée à des axes rectilignes orthogonaux; le calcul différentiel donne :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

D'où la formule :

$$s = \int_{z_0}^{z} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz, \quad . \quad . \quad (3)$$

z_0 et z étant les ordonnées des extrémités de l'arc.

Exemple I.

Soit le cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 = R^2$.
La dérivation de l'équation donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Donc, formule (1),

$$s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = R\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

Or,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{x}{R} + C.$$

L'intégrale prise de $x_0 = 0$ à $x = R$ donne pour le quart de la circonférence :

$$\frac{s}{4} = R\int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{\pi R}{2}.$$

Exemple II.

Soit la spirale logarithmique dont l'équation est $r = ae^{mt}$.
La dérivation fournit :

$$\frac{dr}{dt} = mae^{mt};$$

et la formule (2),

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2e^{2mt} + m^2a^2e^{2mt}}\, dt = a\sqrt{1 + m^2}\int_{t_0}^{t} e^{mt}\, dt$$

$$= \frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}(e^{mt} - e^{mt_0}) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(r - r_0).$$

On a trouvé (*Exercices méthodiques de calcul différentiel*, chapitre XI, exemple II)

$$T = \frac{r}{m}\sqrt{1 + m^2}.$$

D'où

$$T_0 = \frac{r_0}{m}\sqrt{1 + m^2}$$

et

$$T - T_0 = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}(r - r_0).$$

Donc l'arc s est égal à la différence des tangentes menées par ses extrémités.

8

Exemple III.

Soit l'hélice cylindrique dont les équations sont :

$$x = r \sin \frac{z}{ar} \quad \text{et} \quad y = r \cos \frac{z}{ar}.$$

En dérivant les équations, on trouve :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{a} \cos \frac{z}{ar} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{a} \sin \frac{z}{ar},$$

et, par l'emploi de la formule (3),

$$s = \int_{z_0}^{z} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{z}{ar} + \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{z}{ar}}\, dz$$

$$= \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} \int_{z_0}^{z} dz = \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} (z - z_0).$$

Or, a représente la tangente trigonométrique de l'angle constant v que forme la courbe avec les génératrices du cylindre (*Exercices méthodiques de calcul différentiel*, chapitre XVI, exemple).

Donc

$$s = \frac{z - z_0}{\sin v}.$$

Exercices.

1. Cercle dont l'équation polaire est $r = a$.

On trouve :

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{a\pi}{2} \text{ pour le quart de la circonférence.}$$

2. Chaînette dont l'équation est $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

On obtient :

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=\sqrt{y^2-a^2}.$$

Dans le chapitre précédent, on a trouvé pour l'aire :

$$A=a\sqrt{y^2-a^2}.$$

Donc, en fonction de l'arc,

$$A=as.$$

3. Cycloïde dont l'équation différentielle est

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{2ay-y^2}}.$$

De $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, on peut tirer aussi pour expression de l'arc :

$$s=\int_{y_0}^{y}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

L'emploi de cette formule (1′) donne pour la moitié du premier arc de la cycloïde :

$$s=\int_0^{2a}\sqrt{1+\frac{y^2}{2ay-y^2}}\,dy=\sqrt{2a}\int_0^{2a}\frac{dy}{\sqrt{2a-y}}=4a.$$

4. Hélice conique dont les équations sont

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}(h-z)^2$$

et

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=\operatorname{cotg}^2 v.$$

On trouve par la formule (3) :

$$s=\int_{z_0}^{z}\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 v}\,dz=\frac{z-z_0}{\sin v}.$$

5. Parabole semi-cubique dont l'équation est $ay^2 = x^3$.

On obtient pour l'arc compté à partir du sommet :

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{9x}{2a}}\, dx = \frac{(4a + 9x)^{\frac{3}{2}} - (4a)^{\frac{3}{2}}}{27\sqrt{a}}.$$

6. Parabole ordinaire dont l'équation est $y^2 = 2px$.

En faisant usage de la formule (1') donnée dans l'exercice (3), on trouve pour l'arc commençant au sommet :

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\, dy = \frac{1}{2p}\, y\sqrt{p^2 + y^2} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{p^2 + y^2}}{p}.$$

7. Spirale d'Archimède dont l'équation est $r = at$.

On obtient pour l'arc compté à partir du pôle :

$$s = a\int_0^t \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{at}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{a}{2}\log\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right).$$

8. Ellipse dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

La dérivation de l'équation donne $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$.

D'où

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}.$$

Donc, pour le quart du périmètre de l'ellipse,

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx.$$

Or,

$$\int \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = \int \sqrt{\frac{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}{a^2 - x^2}}\, dx,$$

ou, en faisant $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$,

$$\int \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx = \int \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx.$$

D'autre part, si l'on pose $x = a \sin \varphi$, ce qui peut se faire, puisque x est toujours moindre que a, on trouve :

$$\int \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = a \int \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

D'où, en développant $\sqrt{1 - e^2 \sin \varphi}$ par la formule du binôme et substituant aux limites o et a de x, les limites correspondantes 0 et $\frac{\pi}{2}$ de φ,

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi\, d\varphi - \frac{1.1.3}{2.4.6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi\, d\varphi - \cdots \right].$$

Les intégrales $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, d\varphi$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi\, d\varphi$, etc., s'obtiennent immédiatement par l'un des résultats du dernier exercice, chapitre VI, et l'on obtient :

$$s = \frac{\pi a}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \cdots \right];$$

$4s$ pour l'ellipse entière.

9. Épicycloïde dont l'équation est

$$p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}. \qquad (c = a + 2b).$$

Cette équation étant donnée en fonction de p et de r, il s'agit d'abord de transformer l'expression

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dt^2}.$$

Or,

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}.$$

Tirant de là dt^2 et substituant, on obtient :

$$ds = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - p^2}}.$$

D'où la formule :

$$s = \int_{r_0}^{r} \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - p^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Or, de l'équation de la courbe, on tire

$$\sqrt{r^2 - p^2} = a\sqrt{\frac{c^2 - r^2}{c^2 - a^2}};$$

d'où, pour la moitié de l'arc,

$$s = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a} \int_0^c \frac{rdr}{\sqrt{c^2 - r^2}} = \frac{c^2 - a^2}{a} = \frac{4b}{a}(a + b).$$

L'arc entier est donc $\frac{8b}{a}(a + b)$.

Si $b = a$ (cardioïde), on obtient $16a$.

10. Hypocycloïde dont l'équation est

$$p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}. \qquad (c = a - 2b).$$

Un calcul semblable à celui de l'exercice précédent donne

$$\frac{8b}{a}(a-b)$$

pour l'arc entier de la courbe.

Si $b=\frac{a}{4}$, on obtient $\frac{3a}{2}$. C'est le quart de l'hypocycloïde dont l'équation est $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

11. Loxodrome dont les équations sont :

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

et

$$\sqrt{x^2+y^2}\left(e^{n \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}+e^{-n \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}\right)=2a.$$

L'emploi des formules de transformation connues :

$$x=r\sin t\cos\varphi,$$
$$y=r\sin t\sin\varphi,$$
$$z=r\cos t,$$

fournit pour les équations de la courbe rapportée à des coordonnées polaires :

$$r=a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

et

$$\sin t\,(e^{n\varphi}+e^{-n\varphi})=2. \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

et pour l'expression différentielle de l'arc

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

$$ds=\sqrt{dr^2+r^2dt^2+r^2\sin^2 t\,.\,d\varphi^2}.$$

En remplaçant dans cette expression r par a, en vertu de l'équation (α) et observant que $dr=0$, on trouve pour le loxodrome :

$$ds=\sqrt{a^2dt^2+a^2\sin^2 t\,.\,d\varphi^2}.$$

D'où

$$s = a\int_0^t \sqrt{1+\sin^2 t\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}\,dt.$$

L'équation (β) donne $\frac{d\varphi}{dt} = \pm\frac{1}{n\sin t}$.

Donc

$$s = a\int_0^t \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\,dt = a\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}t.$$

Pour $t=\pi$, l'aire est

$$\frac{\pi a}{n}\sqrt{n^2+1}.$$

12. Hyperbole dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Si l'on suit la même marche de calcul que pour l'ellipse (exercice 8), on trouve pour la moitié de l'une des branches de la courbe :

$$s = \int_a^x \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}}\,dx,$$

et, en posant dans le cours du calcul, $\frac{a^2+b^2}{a^2}=e^2$,

$$\int\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)}}\,dx = \int\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,dx.$$

Faisant $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, ce qui est permis, puisque x est toujours plus grand que a, on trouve :

$$\int\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,dx = ae\int\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

et, après avoir développé $\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}$ par la formule du binôme :

$$ae\int\sqrt{1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}\,\frac{dx}{\cos^2\varphi}$$

$$=ae\left[\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^2}\int d\varphi-\frac{1.1}{2.4}\frac{1}{e^4}\int\cos^2\varphi\,d\varphi\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^6}\int\cos^4\varphi\,d\varphi\ldots\right]$$

$$=ae\tang\varphi-\frac{a\varphi}{2e}+\mathrm{C}-\frac{a}{e}\left[\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1}{e^2}\int\cos^2\varphi\,d\varphi\right.$$

$$\left.+\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e^4}\int\cos^4\varphi\,d\varphi\ldots\right]$$

Si l'on prend l'intégrale à partir de $\varphi=0$, qui correspond à $x=a$, on a donc :

$$s=ae\int_0^{\varphi}\sqrt{1+\frac{\cos^2\varphi}{e^2}}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}=ae\tang\varphi-\frac{a\varphi}{2e}$$

$$-\frac{a}{e}\left[\frac{1.1}{2.4}\frac{1}{e^2}\int_0^{\varphi}\cos^2\varphi d\varphi+\frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{1}{e^4}\int_0^{\varphi}\cos^4\varphi d\varphi+\ldots\right].$$

Quant aux intégrales $\int_0^{\varphi}\cos^2x\,dx$, $\int_0^{\varphi}\cos^4x\,dx$, etc., on les détermine aisément, en faisant successivement $m=1$, 2, 3, etc., dans la formule de réduction :

$$\int_0^{\varphi}\cos^{2m}\varphi\,d\varphi=\frac{\sin\varphi\cos^{2m-1}\varphi}{2m}+\frac{2m-1}{2m}\int_0^{\varphi}\cos^{2m-2}\varphi\,d\varphi,$$

résultat que l'on tire de la formule (6), exemple VI, chapitre III, section II, quand on y remplace x par φ, n par $2m$, et que l'on intègre à partir de 0.

Nota important. — La rectification de la développée d'une courbe connue est une question de calcul différentiel. Car celui-ci fournit le rayon de courbure de la courbe, et l'on sait que l'arc compris entre deux points de la développée est égal à la différence des rayons de courbure qui correspondent dans la courbe à ces deux points. Ainsi (fig. 7),

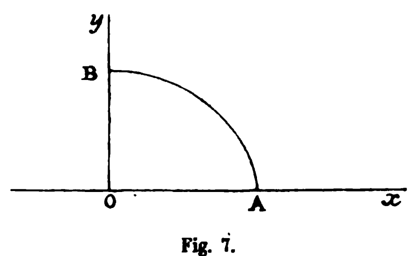


Fig. 7.

les rayons de courbure de l'ellipse, aux deux sommets A et B, sont $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$.

Donc la longueur du quart de la développée est

$$\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Ainsi encore, les rayons de courbure de la cycloïde

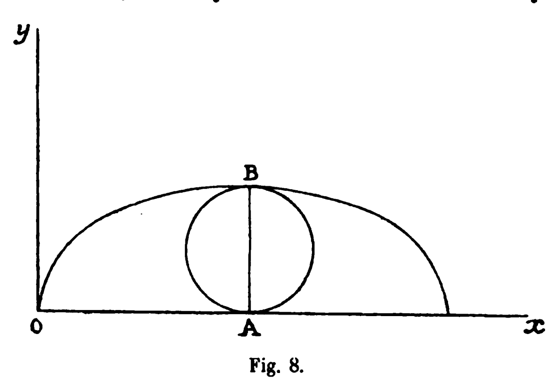


Fig. 8.

aux extrémités O et B (fig. 8) de la première moitié de

l'arc sont O et $4a$. Donc la longueur de la moitié de la développée est $4a$. Ce qui devait être, puisque l'on sait que la développée de la cycloïde est une autre cycloïde, identique à la première.

CHAPITRE IX.

CUBATURE.

Section I. — *Cubature des corps de révolution.*

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires.

Le volume V du corps engendré par la révolution, autour de l'axe des x, d'un segment compris entre un arc quelconque de la courbe, l'axe des abscisses et les ordonnées des extrémités de l'arc, a pour expression :

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx.$$

x_0 et x étant les abscisses des extrémités de l'arc.

Exemple.

Soit l'ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Si l'on prend pour segment générateur le quart de la surface de l'ellipse, l'emploi de la formule donne pour la moitié du volume de l'ellipsoïde de révolution :

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx.$$

Or,

$$\int (a^2 - x^2)dx = a^2x - \frac{x^3}{3} + C.$$

D'où

$$\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}a^3$$

et

$$V = \pi\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2}{3}a^3 = \frac{2}{3}\pi ab^2.$$

Le volume entier de l'ellipsoïde est donc $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

Si $b = a$, on trouve $\frac{4}{3}\pi a^3$ pour le volume de la sphère.

Exercices.

1. Soit la droite dont l'équation est $y = ax$.

Le segment générateur, dont le côté supérieur est une portion quelconque de la droite, devient un trapèze dont la révolution autour de l'axe des x engendre un tronc de cône.

$$V = \pi a^2 \int_{x_0}^{x} x^2 dx = \frac{1}{3}\pi a^2(x^3 - x_0^3)$$

ou bien

$$V = \frac{1}{2}\pi a^2(x^2 + xx_0 + x_0^2)(x - x_0) = \pi(y^2 + yy_0 + y_0^2)\cdot\frac{1}{3}(x - x_0),$$

volume du tronc de cône.

Pour $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $V = \pi y^2 \times \frac{1}{3}x$, volume du cône.

2. Soit la parabole dont l'équation est $y^2 = 2px$.

On a

$$V = \pi\,.\,2p\int_0^x x\,dx = \pi x^2\,.\,p = \frac{1}{2}\pi y^2\,.\,x,$$

pour le volume du paraboloïde de révolution compris

entre le sommet et le plan parallèle à celui des YZ et distant de l'origine de x.

3. Soit l'hyperbole dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

On obtient pour le volume de l'hyperboloïde de révolution compris entre le sommet et le plan perpendiculaire à l'axe des x et à la distance x de l'origine :

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \int_a^x (x^2 - a^2) dx = \pi \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} - a^2 x \right) + \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

Pour $x = 2a$, le volume est $\frac{4}{3} \pi ab$, ou le même que celui de l'ellipsoïde engendré par la moitié de la surface d'une ellipse qui aurait pour axes les axes de l'hyperbole.

4. Corps engendré par la révolution d'un segment circulaire autour du diamètre du cercle parallèle à la corde du segment.

Soit pris le centre O pour origine, et, pour axe des x, le

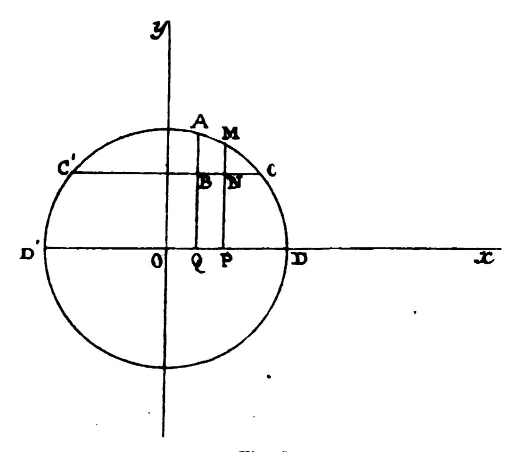


Fig. 9.

diamètre DD' parallèle à la corde CC' du segment (fig. 9).

Par les points A et M de l'arc du segment, menons les ordonnées AQ et MP qui rencontrent CC′ aux points B et N, puis posons :

$$DD' = 2R, \quad CC' = 2a, \quad MP = y, \quad NP = Y,$$
$$OQ = x_0 \quad \text{et} \quad OP = x.$$

Le volume engendré par AMPQ est

$$\pi \int_{x_0}^{x} y^2 \, dx.$$

Le volume engendré par BNPQ est

$$\pi \int_{x_0}^{x} Y^2 \, dx.$$

Donc le volume engendré par AMNB, différence des précédents, est

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (y^2 - Y^2) \, dx.$$

Or $y^2 = R^2 - x^2$ et $Y^2 = R^2 - a^2$; donc

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} (a^2 - x^2) \, dx.$$

L'intégration effectuée, de $x_0 = 0$ à $x = a$, donne pour la moitié du volume cherché $\frac{2}{3}\pi a^3$; donc le volume entier est $\frac{4}{3}\pi a^3$. C'est le volume de la sphère de rayon a.

Pour $a = R$, on trouve $\frac{4}{3}\pi R^3$, volume de la sphère de rayon R.

Le volume engendré par la révolution du trapèze curviligne DCC′D′ est, par suite,

$$\frac{4}{3}\pi (R^3 - a^3).$$

5. **Volume du tore ou de l'anneau engendré par la révolution d'un cercle autour d'une droite située dans son plan.**

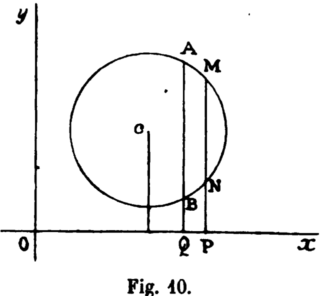


Fig. 10.

Soit pris pour axe des x la droite autour de laquelle la révolution s'accomplit, et, pour axe des y, une perpendiculaire à cette droite (fig. 10).

L'équation du cercle sera :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2.$$

Si l'on emploie la même notation et la même marche de calcul que dans l'exercice qui précède, on trouve :

$$MP=y=\beta+\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2},$$
$$NP=Y=\beta-\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2},$$

et, pour le volume engendré par AMNB,

$$V=4\pi\beta\int_{x_0}^{x}\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\,dx.$$

Mais on trouverait pour expression de l'aire AMNB :

$$2\int_{x_0}^{x}\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}\,dx.$$

D'où le volume du tore est égal à l'aire du cercle générateur multipliée par $2\pi\beta$ ou la circonférence décrite par le centre. C'est le résultat donné par la statique élémentaire.

6. Volume engendré par la révolution de la conchoïde autour de son asymptote.

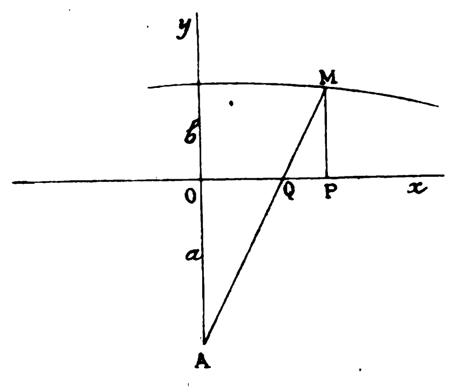


Fig. 11.

La courbe rapportée à son axe, pris comme axe des y, et à son asymptote, prise comme axe des x (fig. 11), a pour équation :

$$xy = (a + y)\sqrt{b^2 - y^2}.$$

D'où, par différentiation,

$$dx = -\frac{ab^2 + y^3}{y^2\sqrt{b^2 - y^2}}\,dy.$$

Substituant cette expression de dx dans la formule et remarquant qu'aux limites $x_0 = 0$ et $x = \infty$ correspondent celles $y_0 = b$ et $y = 0$, on trouve pour la moitié du volume cherché :

$$V = -\pi\int_b \frac{ab^2 + y^3}{\sqrt{b^2 - y^2}}\,dy = \pi\int_0^b \frac{ab^2 + y^3}{\sqrt{b^2 + y^2}}\,dy$$

$$= \frac{\pi b^2}{2}\left(a\pi + \frac{4b}{3}\right).$$

Le volume entier est donc $\pi b^2\left(a\pi + \frac{4b}{3}\right)$.

7. Volume formé par la révolution de la cycloïde autour de l'axe des x.

L'équation différentielle de la courbe est

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

La substitution de cette expression de dx dans la formule fournit pour la moitié du volume cherché :

$$V = \pi \int_0^{2a} \frac{y^3 dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Or (exercice 16, chapitre III, section II),

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = -\sqrt{2ay - y^2}\left(\frac{y^2}{3} + \frac{5ay}{3.2} + \frac{5.3.a^2}{3.2}\right)$$
$$+ \frac{5.3.a^3}{3.2} \text{ arc sin vers } \frac{y}{a} + C.$$

D'où

$$V = \frac{5\pi^2 a^3}{2}.$$

Volume entier : $5\pi^2 a^3$.

8. Volume engendré par la révolution de la straniera autour de son asymptote.

La courbe rapportée à son axe et à son asymptote, prise comme axe des x, a pour équation :

$$xy = 2a\sqrt{2ay - y^2}.$$

D'où

$$dx = -\frac{2a^2}{y\sqrt{2ay - y^2}} dy.$$

Par substitution dans la formule, on trouve pour la moitié du volume cherché :

$$V = -2\pi a^2 \int_{2a}^{0} \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = 2\pi a^2 \int_0^{2a} \frac{ydy}{\sqrt{2ay - y^2}} = 2\pi^2 a^3.$$

9. Volume engendré par la révolution de la cissoïde autour de son asymptote.

L'équation de la courbe, quand on prend son axe pour axe des y et son asymptote pour axe des x, est

$$x^2y = (2a - y)^3.$$

On tire de cette équation :

$$dx = -\frac{(a+y)\sqrt{2ay - y^2}}{y^2}dy,$$

et, par substitution dans la formule, on trouve pour la moitié du volume cherché :

$$V = \pi\int_0^{2a}(a+y)\sqrt{2ay - y^2}\,dy = \pi^2a^3.$$

SECTION II. — *Cubature des corps de forme quelconque.*

Quand la surface du corps est rapportée à des coordonnées rectilignes orthogonales, si l'on peut obtenir, sans intégration et en fonction de x, l'aire u de la section faite dans le corps par un plan perpendiculaire à l'axe des x à une distance x de l'origine, l'expression du volume V est

$$V = \int_{x_0}^{x} udx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Si l'on ne peut obtenir l'aire u sans intégration, il faudra d'abord chercher cette aire par la formule

$$u = \int_{y_0}^{y} zdy, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

z étant donné par l'équation de la surface et l'intégration effectuée en considérant x comme constant.

Plus généralement, on a :

$$V = \iiint dx\, dy\, dz,$$

ou, en intégrant d'abord par rapport à z, à partir de $z = 0$,

$$V = \iint z dx\, dy \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

D'où l'on tire facilement la formule (1).

Nota. — Il est aisé de voir par quelles formules il faudrait remplacer les formules (1) et (2), si l'on cherchait d'abord l'aire de la section faite dans le corps par un plan perpendiculaire, soit à l'axe des y, soit à l'axe des z, aux distances y et z de l'origine.

Exemple I.

Soit à chercher le volume de l'ellipsoïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La section faite dans le corps par un plan perpendiculaire à l'axe des x et à la distance x de l'origine est une ellipse dont l'équation est

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

ou

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Or l'aire de l'ellipse est égale à π multiplié par le pro-

duit des demi-axes, donc l'ellipse de section a pour aire $u = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, et l'emploi de la formule (1) donne :

$$V = \pi bc \int_{x_0}^{x} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx.$$

L'intégration effectuée entre les limites $x_0 = 0$ et $x = a$ fournit $\frac{2}{3}\pi abc$ pour la moitié du volume. Le volume de l'ellipsoïde est donc $\frac{4}{3}\pi abc$.

Exemple II.

Soit à calculer le volume du corps compris entre le plan des xy; le paraboloïde hyperbolique dont l'équation est $z = axy$; deux plans perpendiculaires à l'axe des x, aux distances x_0 et X de l'origine; et deux plans perpendiculaires à l'axe des y, aux distances y_0 et Y de l'origine.

Cherchons d'abord l'aire u de la section faite dans le corps par un plan perpendiculaire à l'axe des x et à la distance x de l'origine.

L'équation du paraboloïde étant $z = axy$, on aura par la formule (2) :

$$u = ax \int_{y_0}^{Y} y dy.$$

D'où

$$u = \frac{1}{2} ax (Y^2 - y_0^2);$$

et, en substituant dans la formule (1),

$$V = \frac{1}{2} a (Y^2 - y_0^2) \int_{x_0}^{X} x dx.$$

L'intégration effectuée, on trouve :

$$V = \frac{1}{4} a (Y_2 - y_0^2)(X_2 - x_0^2).$$

Ce résultat peut s'écrire :

$$V = (X - x_0)(Y - y_0) \cdot \frac{aXY + aXy_0 + aYx_0 + ax_0y_0}{4}$$

ou, en représentant, en vertu de l'équation du paraboloïde,

aXY par Z, aXy_0 par Z',
aYx_0 par Z'' et ax_0y_0 par Z''',

$$V = (X - x_0)(Y - y_0) \cdot \frac{Z + Z' + Z'' + Z'''}{4}.$$

Le volume est donc égal à la base $(X - x_0)(Y - y_0)$ du corps multipliée par la moyenne arithmétique des distances de ses quatre sommets supérieurs au plan des xy.

Exemple III.

Cherchons le volume de la portion de cylindre droit dont la base est le cercle $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ et qui est comprise entre le plan xy et le paraboloïde elliptique $z = ax^2 + by^2$.

On obtiendra d'abord pour l'aire d'une section faite dans le solide par un plan perpendiculaire à l'axe des x, à une distance x de l'origine :

$$u = \int_{y_0}^{y} (ax^2 + by^2)\, dy,$$

puis en intégrant entre les limites $y_0 = \beta - \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}$ et $y = \beta + \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}$ fournies par l'équation du cercle :

$$u = 2ax^2\sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2} + \frac{2b}{3}\left[3\beta^2 + R^2 - (x - \alpha)^2\right]\sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.$$

D'où

$$V = 2a \int_{x_0}^{x} x^2 \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\, dx$$

$$+ \frac{2b}{3} \int_{x_0}^{x} \left[3\beta^2 + R^2 - (x - \alpha)^2\right] \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\, dx,$$

les limites étant $x_0 = \alpha - R$ et $x = \alpha + R$.

Pour effectuer les intégrations, posons d'abord $x - \alpha = t$, ce qui donne $dx = dt$ et, pour limites, $x_0 = -R$ et $x = +R$. On aura :

$$V = 2a \int_{-R}^{+R} (t + \alpha)^2 \sqrt{R^2 - t^2}\, dt$$

$$+ \frac{2b}{3} \int_{-R}^{+R} (3\beta^2 + R^2 - t^2) \sqrt{R^2 - t^2}\, dt.$$

Cette nouvelle expression de V renferme les trois intégrales :

$$\int_{-R}^{+R} t^2 \sqrt{R^2 - t^2}\, dt, \quad \int_{-R}^{+R} t \sqrt{R^2 - t^2}\, dt \quad \text{et} \quad \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - t^2}\, dt.$$

Pour les déterminer, on multipliera et on divisera chacune d'elles, sous le signe, par $\sqrt{R^2 - t^2}$, puis on appliquera la formule de réduction

$$\int_{-R}^{+R} \frac{t^n\, dt}{\sqrt{R^2 - t^2}} = \frac{n - 1}{n} R^2 \int_{-R}^{+R} \frac{t^{n-2}\, dt}{\sqrt{R^2 - t^2}},$$

formule que l'on obtient en remplaçant x par t et a par R dans le résultat trouvé, exemple III, chapitre III, section II.

Le calcul donne pour valeurs respectives des trois intégrales :

$$\frac{\pi R^4}{8}, \quad 0 \quad \text{et} \quad \frac{\pi R^2}{2};$$

et, par suite,

$$V = \pi R^2 \left[a\left(\alpha^2 + \frac{R^2}{4}\right) + b\left(\beta^2 + \frac{R^2}{4}\right) \right].$$

C'est le volume d'un cylindre de même base que celui de l'énoncé et qui aurait pour hauteur l'ordonnée du paraboloïde correspondante à

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \frac{R^2}{4}} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{\beta^2 + \frac{R^2}{4}}.$$

Exercices.

1. Volume du paraboloïde elliptique dont l'équation est $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x$.

L'aire de la section faite dans le paraboloïde par un plan perpendiculaire à son axe et à une distance x du sommet se trouve sans intégration. Elle est

$$u = 2\pi \sqrt{pq}\, x,$$

et l'on obtient pour la portion du paraboloïde comprise entre le sommet et le plan sécant :

$$V = \pi \sqrt{pq}\, x^2.$$

2. Volume de l'hyperboloïde à une nappe dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On trouve, sans intégration, que l'aire de la section faite dans l'hyperboloïde par un plan perpendiculaire à l'axe des z et à la distance z du centre est

$$u = \pi ab\left(1 + \frac{z^2}{c^2}\right);$$

et, en substituant cette expression de u dans la formule appropriée

$$V = \int_{z_0}^{z} u dz,$$

on obtient, pour la portion de l'hyperboloïde comprise entre le plan des xy et le plan sécant :

$$V = \pi ab\left(z + \frac{z^3}{3c^2}\right).$$

3. Volume de l'une des nappes de l'hyperboloïde dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Sans intégration, on trouve que l'aire de la section faite dans l'hyperboloïde par un plan perpendiculaire à l'axe des z et à une distance z de l'origine, plus grande que c, est :

$$u = \pi ab\left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

et l'on obtient pour la portion de nappe comprise entre le sommet de celle-ci et le plan sécant :

$$V = \pi ab\int_{c}^{z}\left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \pi ab\left(\frac{z^3}{3c^2} - z + \frac{2}{3}c\right).$$

Pour $z = 2c$, le volume serait $\frac{4}{3}\pi abc$ ou le volume d'un ellipsoïde qui aurait, pour axes, les axes de l'hyperboloïde.

4. Volume commun à deux cylindres circulaires droits, de rayons égaux, et dont les axes se coupent à angles droits.

Soient $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + z^2 = a^2$ les équations des cylindres.

Si l'on prend pour origine de coordonnées rectilignes orthogonales le point de rencontre des axes et ceux-ci pour

axes des y et des z (fig. 12), la projection du volume sera le carré ABCD et la section faite dans le corps par un plan

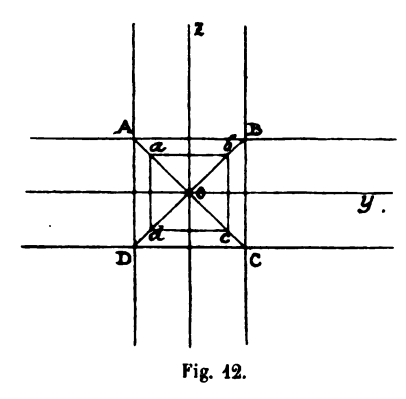


Fig. 12.

perpendiculaire à l'axe des x, et à la distance x de l'origine, sera, en grandeur et en projection, le carré *abcd*.

L'aire de *abcd* est $4yz$ ou $4(a^2 - x^2)$, en vertu des équations des cylindres.

Donc, pour la moitié du volume cherché, on aura

$$V = 4\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{8a^3}{3},$$

et, pour volume total, $\frac{16a^3}{3}$.

5. Volume du corps compris entre le rectangle OADB (fig. 13), les triangles rectangles OAC et OBC dont les plans sont perpendiculaires à celui du rectangle, et la quatrième face ACBD formée d'une suite continue de lignes droites telles que MN menées de AC à BD, parallèlement à BC.

Prenons O comme origine et OA, OB et OC comme axes des x, des y et des z.

Menons MP perpendiculaire sur OA et tirons NP.

Le triangle MNP sera une section faite dans le corps perpendiculairement à l'axe des x.

Posons $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OP = x$ et $MP = z$.

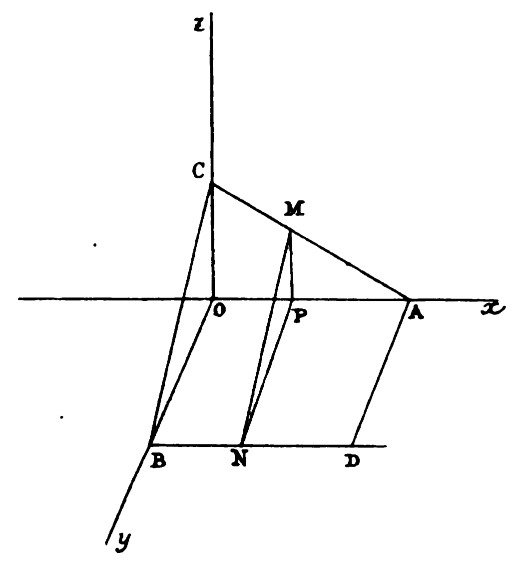


Fig. 13.

L'aire u du triangle MNP est $\frac{bz}{2}$ ou, les triangles semblables ACO et AMP fournissant $z = \frac{c}{a}(a - x)$,

$$u = \frac{bc}{2a}(a - x).$$

Le volume cherché est donc

$$V = \frac{bc}{2a}\int_0^a (a - x)\,dx = \frac{abc}{4}.$$

6. Volume du corps ABCD (fig. 14), retranché d'un cylindre circulaire droit dont l'équation est $x^2 + y^2 = a^2$, par un plan passant par le centre O de la base et faisant avec cette base l'angle α.

Prenons O comme origine, la trace BC du plan sécant comme axe des y, l'axe du cylindre comme axe des z et OA, perpendiculaire à BC, comme axe des x.

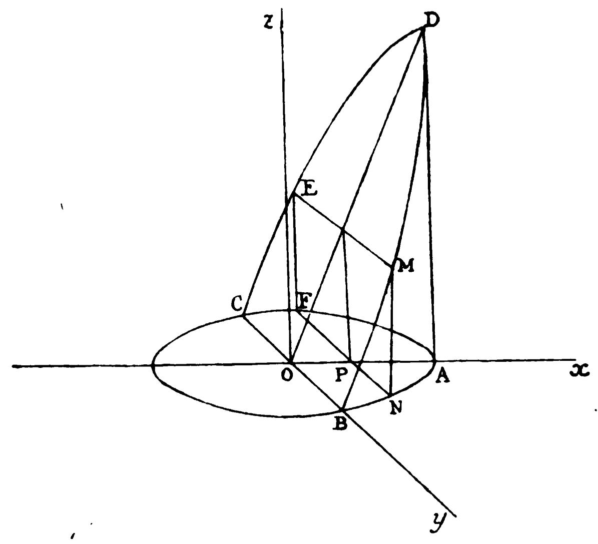


Fig. 14.

La section faite dans le corps, par un plan perpendiculaire à l'axe des x et à une distance OP de l'origine, sera un rectangle EFNM.

Posant $OP = x$, $NP = y$, $MN = z$, l'aire u de ce rectangle sera $2yz$.

Or $\frac{z}{x} = \operatorname{tang} \alpha$, d'où $z = x \operatorname{tang} \alpha$; et, de l'équation du cylindre, on tire $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Donc

$$u = 2x \operatorname{tang} \alpha \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Par suite, le volume cherché est

$$V = 2 \operatorname{tang} \alpha \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{2}{3} a^3 \operatorname{tang} \alpha.$$

7. Volume commun au paraboloïde de révolution et au cylindre circulaire droit dont les équations sont respectivement :

$$y^2 + z^2 = 4ax \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = 2ax.$$

L'aire de la section faite dans le solide commun par un plan perpendiculaire à l'axe des x et à la distance x de l'origine est

$$u = 2\int_{y_0}^{y} \sqrt{4ax - y^2}\, dy.$$

Effectuant l'intégration entre les limites $y = +\sqrt{2ax - x^2}$ et $y_0 = -\sqrt{2ax - x^2}$ fournies par l'équation du cylindre, on obtient :

$$u = 8ax.\text{arc sin}\sqrt{\frac{2a - x}{4a}} + 2x\sqrt{4a^2 - x^2}.$$

Par suite,

$$V = \int_0^{2a}\left[8ax.\text{arc sin}\sqrt{\frac{2a - x}{4a}} + 2x\sqrt{4a^2 - x^2}\right]dx$$

$$= a^3\left(2\pi + \frac{16}{3}\right).$$

8. Volume commun à la sphère et au cylindre circulaire droit dont les équations sont respectivement

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = ax.$$

Pour calculer le volume, on pourrait suivre la marche ordinaire; mais, pour éviter les intégrations laborieuses, rapportons les surfaces à des coordonnées polaires en posant $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$.

Les équations de la sphère et du cylindre deviennent :

$$r^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{et} \qquad r^2 = ar\cos t.$$

D'autre part, la formule (3), $V = \iint z\,dxdy$, devient :

$$V = \iint zrdrdt,$$

car il est démontré, dans les cours, que $dxdy = rdrdt$.

Le quart du volume cherché est

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{a\cos t} \sqrt{a^2 - r^2}\, rdr = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

Le volume total est donc $\frac{a^3}{3}\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)$.

CHAPITRE X.

QUADRATURES.

SECTION I. — *Quadrature des surfaces de révolution.*

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires.

La surface S engendrée par un arc quelconque de la courbe tournant autour de l'axe des x a pour expression :

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

x_0 et x étant les abscisses des extrémités de l'arc.

Cette formule peut s'écrire :

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} yds,$$

ou

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} Ndx,$$

ou encore

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} y \text{ séc } \alpha dx,$$

ds représentant la différentielle de l'arc; N, la normale en un point quelconque de l'arc; et α, l'angle que la tangente menée par tel point de l'arc fait avec l'axe des x.

Exemple.

Cherchons la surface engendrée par la révolution autour de l'axe des x de l'ellipse dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ou} \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

De l'équation, on tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Par suite,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}}{a^2y}. \quad . \quad . \quad (1)$$

Cela posé, supposons d'abord $a > b$, c'est-à-dire l'ellipse tournant autour de son grand axe.

L'expression précédente pourra s'écrire :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}}{a^2y},$$

ou, en posant $a^2 - b^2 = a^2e^2$,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{ay}.$$

L'emploi de la formule, sous sa première forme, donne pour la moitié de l'aire cherchée :

$$S = 2\pi \cdot \frac{b}{a} \int_{0}^{a} \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx.$$

Or,

$$\int \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - e^2x^2} + \frac{a^2}{2e} \operatorname{arc\,sin} \frac{ex}{a} + C.$$

D'où

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - e^2x^2}\, dx = \frac{1}{2} ab + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{arc\,sin} e}{e}.$$

Par substitution, on trouve :

$$S = \pi b^2 + \pi ab \cdot \frac{\operatorname{arc\,sin} e}{e}.$$

L'aire totale de l'ellipsoïde est donc

$$2\pi b^2 + 2\pi ab \cdot \frac{\operatorname{arc\,sin} e}{e}.$$

Supposons, en second lieu, $a < b$, c'est-à-dire l'ellipse tournant autour de son petit axe.

Dans ce cas, l'expression (1) s'écrira :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2 y}.$$

En posant $b^2 - a^2 = b^2e^2$, on aura :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4 + b^2e^2x^2}}{a^2 y}.$$

La moitié de l'aire de l'ellipsoïde est donc

$$S = 2\pi \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 + b^2e^2x^2}\, dx.$$

Mais

$$\int \sqrt{a^4 + b^2e^2x^2}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^4 + b^2e^2x^2} + \frac{a^4}{2be} \log \frac{bex + \sqrt{a^4 + b^2e^2x^2}}{a^2} + C.$$

D'où

$$\int_0^a \sqrt{a^4 + b^2e^2x^2}\, dx = \frac{a^2b}{2} + \frac{a^4}{2be} \log \frac{b}{a}(1 + e).$$

La substitution donne :

$$S = \pi b^2 + \pi a^2 \cdot \frac{\log \frac{b}{a}(1 + e)}{e}.$$

L'aire totale est, par conséquent,

$$2\pi b^2 + 2\pi a^2 \cdot \frac{\log \frac{b}{a}(1 + e)}{e}.$$

Dans les deux cas, il est facile de trouver que, si $b = a$, les expressions finales donnent $4\pi a^2$, aire de la sphère.

Exercices.

1. Génératrice de la surface : droite parallèle à l'axe des x, $y = R$.

La formule $$S = 2\pi \int_{x_0}^{x} N dx$$

donne immédiatement, puisque $N = R$,

$$S = 2\pi R \int_{x_0}^{x} dx = 2\pi R\,(x - x_0).$$

La surface du cylindre engendré est donc égale à la circonférence de la base, $2\pi R$, multipliée par la hauteur, $x - x_0$.

2. Génératrice : droite passant par l'origine, $y = ax$.

L'emploi de la formule sous sa première forme donne, en intégrant à partir de $x_0 = 0$,

$$S = 2\pi a \sqrt{1 + a^2} \cdot \frac{x^2}{2},$$

ou, en remplaçant a par $\frac{y}{x}$,

$$S = 2\pi y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

L'aire du cône engendré est donc égale à la circonférence de la base, $2\pi y$, multipliée par la moitié du côté, $\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Génératrice : circonférence dont l'équation est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Dans le cercle, N = R. Donc la formule, sous sa troisième forme, donne immédiatement

$$S = 2\pi R \int_{x_0}^{x} dx = 2\pi R(x - x_0).$$

C'est l'aire de la zone : circonférence d'un grand cercle multipliée par la hauteur de la zone.

En intégrant de $x_0 = -R$ à $x = +R$, on trouve pour aire de la sphère :

$$4\pi R^2,$$

quatre fois l'aire d'un grand cercle.

4. Génératrice : la tractrice, dont l'équation différentielle est $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$.

D'une part,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

D'autre part, l'équation de la courbe donne

$$ydx = -\sqrt{a^2 - y^2}\,dy.$$

Substituant dans la formule primitive et remarquant qu'aux limites $x_0 = 0$ et $x = \infty$ correspondent les limites $y_0 = a$ et $y = 0$, on obtient

$$S = -2\pi a \int_a^0 dy = 2\pi a \int_0^a dy = 2\pi a^2,$$

deux fois l'aire du cercle dont la tangente constante serait le rayon.

5. Génératrice : la cycloïde, dont l'équation différentielle est $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$.

Pour la moitié de l'aire, on trouve :

$$S = 2\pi \int_0^{2a} \frac{y dy}{\sqrt{2a - y}} = \frac{32}{3} \pi a^2.$$

6. Génératrice : chaînette dont l'équation est

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

On a trouvé, *Exercices méthodiques de calcul différentiel*, chapitre XI, exercice 15,

$$N = \frac{y^2}{a}.$$

Donc, en vertu de l'équation de la courbe,

$$N = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2;$$

et, par emploi de la formule, troisième forme,

$$S = \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \pi a \left[\frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + x\right].$$

7. Génératrice : parabole dont l'équation est $y^2 = 2px$.

On obtient pour la portion de surface du paraboloïde de révolution comprise entre le sommet et un plan perpendiculaire à l'axe des x et à une distance x du sommet :

$$S = 2\pi\sqrt{p}\int_0^x \sqrt{p + 2x}\,dx = \frac{2}{3}\pi\sqrt{p}\left[(p + 2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

8. Génératrice : hyperbole dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En opérant comme plus haut, dans l'application à l'ellipse, posant dans le cours du calcul $a^2 + b^2 = a^2e^2$, puis intégrant entre a et x, c'est-à-dire en ne considérant que la nappe de l'hyperboloïde de révolution située du côté des x positifs, on trouve pour la portion de cette nappe comprise entre le sommet et un plan perpendiculaire à l'axe des x, à la distance x de l'origine,

$$S = \pi\frac{b}{a}\left(x\sqrt{e^2x^2 - a^2} - \frac{a^2}{e}\log\frac{ex + \sqrt{e^2x^2 - a^2}}{a}\right)$$
$$- \pi b^2 + \frac{\pi ab}{e}\log\frac{ae + b}{a}.$$

9. Génératrice : hyperbole équilatère rapportée à asymptotes et dont l'équation est $xy = k^2$.

La formule, sous sa quatrième forme, fournit :

$$S = 2\pi k^2\int_{x_0}^{x} \text{séc}\,\alpha\frac{dx}{x}.$$

Or, de l'équation de la courbe, on tire :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k^2}{x^2}.$$

D'où

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{dy}{dx} = \frac{k^2}{x^2};$$

et, par suite,

$$x = \frac{k}{(\tang \alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

et

$$\log x = \log k - \frac{1}{2} \log \tang \alpha.$$

Différentiant la dernière égalité, on trouve :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \frac{d\alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Substituant cette expression de $\frac{dx}{x}$ dans celle de S et remplaçant les limites x_0 et x par leurs correspondantes α_0 et α, on obtient :

$$S = -\pi k^2 \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} = \pi k^2 \int_{\alpha}^{\alpha_0} \frac{dx}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

Mais

$$\int \frac{d\alpha}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \log \tang \frac{\alpha}{2} + C.$$

D'où

$$S = \pi k^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha_0} - \frac{1}{\cos \alpha} + \log \tang \frac{\alpha_0}{2} - \log \tang \frac{\alpha}{2} \right).$$

Section II. — *Quadrature des surfaces quelconques.*

Soit $z = f(x, y)$ l'équation de la surface d'un solide rapportée à des axes rectilignes orthogonaux.

Si l'on peut, sans intégration, obtenir en fonction de x le périmètre l d'une section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des x, et que s soit l'arc de la courbe plane que l'on obtient en coupant la surface par un

autre plan perpendiculaire à celui de la première section, l'expression de la surface est

$$S = \int_{x_0}^{x} l ds. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si l'on ne peut obtenir l sans intégration, il faudra recourir à la formule plus générale

$$S = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dy \quad . \quad (2)$$

Exemple I.

Étant donnés une sphère et un cylindre circulaire droit dont les équations sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 = ax,$$

calculer la surface de la portion de cylindre contenue dans la sphère.

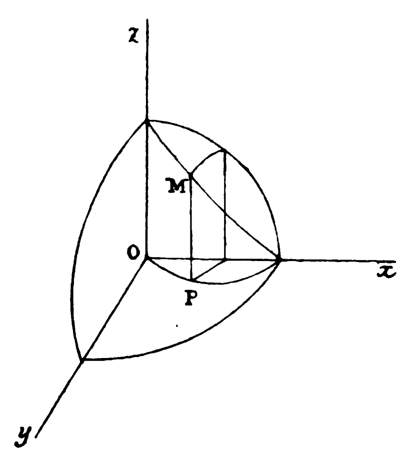


Fig. 15.

Si l'on coupe la surface par un plan perpendiculaire à

l'axe des x, à la distance x de l'origine (fig. 15), le quart du périmètre de la section est visiblement :

$$l = \mathrm{MP} = z;$$

et, en vertu des équations de la sphère et du cylindre,

$$l = z = \sqrt{a^2 \quad x^2 - y^2} = \sqrt{a(a - x)}$$

D'autre part, en coupant la surface par le plan $z = 0$, perpendiculaire à celui de la première section, on obtient la circonférence de la base du cylindre dont l'arc s a pour différentielle

$$ds = \frac{adx}{2\sqrt{x(a - x)}}.$$

Substituant, dans la formule (1), les expressions de l et de ds, il vient pour le quart de la surface cherchée :

$$\mathrm{S} = a^{\frac{3}{2}} \int_0^a \frac{dx}{2\sqrt{x}} = a^2.$$

Exemple II.

Soit la surface conique dont l'équation est $z^2 = 2xy$.

De l'équation de la surface, on tire :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x}{z}.$$

D'où

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}.$$

En intégrant à partir de $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$, la formule (2) donne :

$$\mathrm{S} = \int_0^x dx \int_0^y \frac{x + y}{\sqrt{2xy}} dy.$$

Or

$$\int_0^y \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\,dy = \sqrt{\frac{x}{2}}\int_0^y y^{-\frac{1}{2}}\,dy + \frac{1}{\sqrt{2x}}\int_0^y y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \sqrt{2x}\,y^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2x}}\,y^{\frac{3}{2}}.$$

Donc

$$S = y^{\frac{1}{2}}\int_0^x \sqrt{2x}\,dx + \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2x}} = \frac{2}{3}x\sqrt{2xy}$$

$$+ \frac{2}{3}y\sqrt{2xy} = \frac{2}{3}z(x+y).$$

Exercices.

1. Calculer, au moyen de la formule (2), la surface de la sphère dont l'équation est $x^2+y^2+z^2=R^2$.

On trouve pour le huitième de la sphère :

$$S = R\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = \frac{1}{2}\pi R^2.$$

2. Étant donné le paraboloïde de révolution dont l'équation est

$$y^2+z^2=2px,$$

calculer, au moyen de la formule (2), la surface de la portion de ce solide comprise entre le sommet et un plan perpendiculaire à l'axe des x, mené à la distance x de l'origine.

On obtiendra pour le quart de la portion du solide :

$$S = \int_0^x \sqrt{p^2+2px}\,dx \int_0^{\sqrt{2px}} \frac{dy}{\sqrt{2px-y^2}}$$

$$= \frac{1}{6}\pi\sqrt{p}\left[(p+2x)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right].$$

3. Chercher la surface du solide dont on a calculé le volume, au chapitre précédent, section II, exercice 4.

Cherchons d'abord la partie de la surface qui se projette dans le triangle OBC, c'est-à-dire le huitième de la surface totale.

Le périmètre de la section faite perpendiculairement à l'axe des x, à la distance x de l'origine, se réduit ici à $l = bc = 2z = 2\sqrt{a^2 - x^2}$.

D'autre part, le plan $z = 0$, perpendiculaire à celui de la première section, coupe la surface suivant la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$, dont l'arc s a pour différentielle : $ds = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

La formule (1) donne :

$$S = 2a \int_0^a dx = 2a^2.$$

La surface totale cherchée est donc $16a^2$.

4. Calculer la surface convexe du solide dont on a déterminé le volume, chapitre IX, section II, exercice 6.

Le périmètre de la section faite dans la surface, par un plan perpendiculaire à l'axe des x et à la distance $OP = x$ de l'origine, est $l = 2MN = 2z = 2x \operatorname{tang} \alpha$.

En second lieu, le plan $z = 0$, perpendiculaire à celui de la première section, coupe la surface suivant la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$, dont l'arc s a pour différentielle : $ds = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

La formule (1) donne donc,

$$S = 2a \operatorname{tang} \alpha \int_0^a \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a^2 \operatorname{tang} \alpha.$$

5. Les données étant les mêmes que dans l'exemple I qui précède ces exercices, calculer la portion de surface de la sphère interceptée par le cylindre.

La formule (2) écrite sous la forme

$$S = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \, dxdy$$

devient dans la question présente :

$$S = a \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} \frac{dxdy}{z}.$$

Transformons les équations des surfaces et l'expression de S en coordonnées polaires. Pour ce, posons :

$$x = r \cos t \qquad \text{et} \qquad y = r \sin t.$$

Les équations de la sphère et du cylindre deviennent

$$r^2 + z^2 = a^2 \qquad \text{et} \qquad r^2 = ar \cos t;$$

et

$$S = a \int_{t_0}^{t} \int_{r_0}^{r} \frac{rdrdt}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

En effectuant l'une des intégrations entre les limites $r_0 = 0$ et $r = a \cos t$, fournies par l'équation du cylindre; et l'autre, entre les limites $t_0 = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$, on trouve pour le quart de la surface cherchée :

$$S = a \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_{0}^{a \cos t} \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{1}{2} a^2 (\pi - 2).$$

CHAPITRE XI.

INTÉGRATION DES FONCTIONS EXPLICITES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

Soit à intégrer une expression de la forme

$$Mdx + Ndy,$$

M et N étant des fonctions des variables indépendantes x et y.

Pour que telle expression soit intégrable, il faut que

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

A la condition que cette identité ait lieu, on obtient pour l'intégrale cherchée :

$$u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{d.\int Mdx}{dy}\right) dy + C. \quad . \quad (1)$$

ou

$$u = \int Ndy + \int \left(M - \frac{d.\int Ndy}{dx}\right) dx + C. \quad . \quad (2)$$

Ne point perdre de vue que les intégrations par rapport à x doivent être effectuées en considérant y comme constant; et les intégrations par rapport à y, en regardant x comme constant.

Procédé d'abréviation. — On abrège souvent le calcul en procédant comme suit :

Si l'on emploie la formule (1), n'ajouter à l'intégrale de Mdx que celle des termes de Ndy qui ne renferment point x; si l'on fait usage de la formule (2), n'ajouter à l'intégrale de Ndy que celle des termes de Mdx qui ne contiennent point y.

Soit à intégrer une expression de la forme

$$Mdx + Ndy + Pdz,$$

M, N et P étant des fonctions des trois variables indépendantes x, y et z.

Une expression de la sorte n'est intégrable que si l'on a :

$$\frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{dP}{dx} = \frac{dM}{dz}.$$

Étant admis que ces identités aient lieu, l'intégrale cherchée est

$$v = u + \int \left(P - \frac{du}{dz}\right) dz + C, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dans laquelle u représente l'intégrale de $Mdx + Ndy$ trouvée comme précédemment.

Observer sans cesse dans le calcul que les intégrations par rapport à x, celles par rapport à y et celles par rapport à z, doivent être effectuées en considérant respectivement y et z, x et z, x et y comme constants.

Procédé d'abréviation. — Intégrer Mdx, puis les termes de Ndy qui ne renferment point x, puis les termes de Pdz qui ne contiennent ni x ni y, et additionner les résultats des trois intégrations.

Si l'on a intérêt à effectuer les trois intégrations partielles dans un autre ordre, il est facile de voir comment il faut modifier le procédé qui, dans le cas de trois variables, doit être essayé d'abord, tant il peut abréger le calcul.

D'après ce qui précède, on formulera aisément, et le procédé normal, et le procédé d'abréviation qu'il faut suivre dans l'intégration d'expressions différentielles de quatre variables indépendantes, de cinq, etc.

Exemple I.

Soit à intégrer l'expression

$$\left(a+\frac{n}{1+n^2x^2}\right)dx+\left(b+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)dy,$$

dans laquelle

$$M=a+\frac{n}{1+n^2x^2} \quad \text{et} \quad N=b+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Puisque M n'est fonction que de x et N que de y, on a évidemment :

$$\frac{dM}{dy}=0=\frac{dN}{dx}.$$

Pour la même raison, les formules (1) et (2) se fondent dans une seule :

$$u=\int Mdx+\int Ndy+C.$$

D'où, intégration immédiate :

$$u=ax+\text{arc tang }nx+by+\log C(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Exemple II.

Soit

$$\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}(ydx-xdy).$$

On a :

$$M=\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad N=-\frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}},$$

et, par suite,

$$\frac{dM}{dy}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{x^2+2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{dN}{dx}.$$

D'autre part, puisque N n'est pas indépendant de x,

$$N - \frac{d.\int Mdx}{dy} = 0.$$

La formule (1) devient donc simplement

$$u = \int Mdx + C,$$

et l'intégrale cherchée est

$$u = \frac{1}{y}\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + C.$$

Exemple III.

Soit

$$\left(3x^2 + \frac{1}{x^2} + 2xy^2 - \frac{2y^2}{x^3}\right) dx + \left(3y^2 + \frac{1}{y^2} + 2x^2y + \frac{2y}{x^2}\right) dy.$$

On trouve :

$$\frac{dM}{dy} = 4y\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = \frac{dN}{dx},$$

puis

$$\int Mdx = x^3 - \frac{1}{x} + x^2y^2 + \frac{y^2}{x^2}.$$

L'intégrale des termes de Ndy qui ne renferment point x est

$$y^3 - \frac{1}{y}.$$

Donc, procédé d'abréviation suivi,

$$u = x^3 + y^3 - \frac{x+y}{xy} + y^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

Exemple IV.

$$\left[1-\frac{4y^2}{(x-y)^2}\right]dx-\left[1-\frac{4x^2}{(x-y)^2}\right]dy.$$

On trouve successivement :

$$\frac{dM}{dy}=-\frac{8xy}{(x-y)^3}=\frac{dN}{dx};$$

$$\int Mdx=\int dx-4y^2\int\frac{dx}{(x-y)^2}=x+\frac{4y^2}{x-y};$$

$$\int\left(N-\frac{d.\int Mdx}{dy}\right)dy=\int\left[-1+\frac{4x^2}{(x-y)^2}-\frac{8xy-4y^2}{(x-y^2)}\right]dy$$

$$=\int(-1+4)\,dy=3y.$$

Donc, formule (1) :

$$u=x+\frac{4y^2}{x-y}+3y+C,$$

ou

$$u=\frac{(x+y)^2}{x-y}+C.$$

Exemple V.

$$(\text{tang}\,y+z\cos x)\,dx+\left(\frac{x}{\cos^2 y}-\text{tang}\,z-4y\right)dy$$

$$-\left(\frac{y}{\cos^2 z}-\sin x-1\right)dz.$$

On obtient :

$$\frac{dM}{dy}=\frac{1}{\cos^2 y}=\frac{dN}{dx},$$

$$\frac{dN}{dz}=-\frac{1}{\cos^2 z}=\frac{dP}{dy},$$

$$\frac{dP}{dx}=\cos x=\frac{dM}{dz}.$$

Le procédé d'abréviation fournit :

$$\int \mathrm{M}dx = x \operatorname{tang} y + z \sin x;$$

$$\int (-\operatorname{tang} z - 4y)\, dy = -y \operatorname{tang} z - 2y^2;$$

$$\int (+1)\, dz = z.$$

L'intégrale cherchée est donc :

$$v = x \operatorname{tang} y - y(2y + \operatorname{tang} z) + z(1 + \sin x) + \mathrm{C}.$$

Exemple VI.

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2 z}{(x-yz)^2}\right] dx + \left[\frac{1}{y} + \frac{x^2}{(x-yz)^2}\right] dy - \left[\frac{1}{z} - \frac{xy^2}{(x-yz)^2}\right] dz.$$

On trouve :

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy} = -\frac{2xyz}{(x-yz)^3} = \frac{d\mathrm{N}}{dx},$$

$$\frac{d\mathrm{N}}{dz} = \frac{2x^2 y}{(x-yz)^3} = \frac{d\mathrm{P}}{dy},$$

et

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} = -\frac{y^2(x+y)}{(x-yz)^3} = \frac{d\mathrm{M}}{dz}.$$

Si l'on cherche d'abord l'intégrale de $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ au moyen de la formule (1), on obtient :

$$u = \log xy + \frac{xy}{x-yz}.$$

La formule (3) donne ensuite :

$$v = \log xy + \frac{xy}{x-yz} + \int \left[-\frac{1}{z} + \frac{xy^2}{(x-yz)^2} - \frac{xy^2}{(x-yz)^2}\right] dz + \mathrm{C},$$

ou

$$v = \log \frac{xy}{z} + \frac{xy}{x-yz} + \mathrm{C}.$$

Exercices.

1. $\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx-\left(\frac{1}{y^3}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy.$

$$u=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}+\text{arc tang}\,\frac{x-y}{1+xy}+\text{C}.$$

2. $(a^3y+x^4)\,dx-(b^4-a^3x)\,dy.$

$$u=\frac{x^5}{5}+a^3xy-b^4y+\text{C}.$$

3. $[x(a^2+x^2)+y(b+y)]\,dx+[x(b+2y)+y(y^3-a^3)]\,dy.$

$$u=x^2\left(\frac{x^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right)+xy(b+y)+y^2\left(\frac{y^3}{5}-\frac{a^3}{2}\right)+\text{C}.$$

4. $\left(\text{tang}\,y-\frac{y}{\sin^2 x}-\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}\right)dx+\left(\text{cotg}\,x+\frac{x}{\cos^2 y}+\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy.$

$$u=x\,\text{tang}\,y+y\,\text{cotg}\,x+\text{arc sin}\,\frac{y}{x}+\text{C}.$$

5. $\left(\frac{x+y}{xy}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx-\left(\frac{x+y+1}{y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy.$

$$u=\frac{x+1}{y}+\text{arc tang}\,\frac{x}{y}+\log\frac{\text{C}x}{y}\cdot$$

6. $\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right]dx-\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{(x-y)^2}\right]dy.$

$$u=\frac{1}{x-y}+\frac{x+y}{xy}+\log\frac{\text{C}x}{y}\cdot$$

7. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}+3y^2dy.$

$$u=\sqrt{x^2+y^2}+\text{arc tang}\,\frac{x}{y}+y^3+C.$$

8. $\dfrac{1}{(x-y)^2}(x^2dy-y^2dx).$

$$u=\frac{xy}{x-y}+C.$$

9. $\left(\text{séc}\,y+\dfrac{z\sin x}{\cos^2 x}\right)dx+\left(\text{séc}\,z+\dfrac{x\sin y}{\cos^2 y}\right)dy$

$$+\left(\text{séc}\,x+\frac{y\sin z}{\cos^2 z}\right)dz.$$

$$v=x\,\text{séc}\,y+y\,\text{séc}\,z+z\,\text{séc}\,x+C.$$

10. $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}-\dfrac{dy}{y^2-b^2}-\dfrac{z^2dz}{z^3+1}.$

$$v=\log\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}-\frac{1}{2b}\log\frac{y-b}{y+b}-\frac{1}{3}\log C(z^3+1).$$

11. $(2a^3x-yz^3)\,dx-(xz^3-3by^2)\,dy-z^2(3xy+4z)\,dz.$

$$v=a^3x^2+by^3-z^3(xy+z)+C.$$

12. $(xy+z)\left(\dfrac{dx}{xz}+\dfrac{dy}{zy}-\dfrac{dz}{z^2}\right).$

$$v=\frac{xy}{z}+\log\frac{Cxy}{z}.$$

13. $\dfrac{xdx+ydy+zdz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{zdx-xdz}{z^2+(x-z)^2}+\text{arc}\sin z.\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$

$$v=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\text{arc tang}\,\frac{x-z}{z}+\frac{1}{2}(\text{arc}\sin z)^2+C.$$

14. $$\left[\frac{yz^2}{(z-xy)^2}+\frac{2}{x}\right]dx+\left[\frac{xz^2}{(z-xy)^2}+\frac{2}{y}\right]dy-\left[\frac{x^2y^2}{(z-xy)^2}-\frac{2}{z}\right]dz.$$

$$v=\frac{xyz}{z-xy}+2\log xyz+C.$$

Comme suite à ces exercices, nous engageons les élèves à intégrer les expressions différentielles trouvées chapitre II des *Exercices méthodiques de calcul différentiel.*

CHAPITRE XII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE, A DEUX VARIABLES.

SECTION I. — *Équations dans lesquelles la dérivée est du premier degré.*

Les équations dont il s'agit peuvent être mises sous la forme :

$$M dx + N dy = 0 \quad \text{ou} \quad N\frac{dy}{dx}+M=0,$$

M et N étant des fonctions des variables x et y.

Trois cas principaux d'intégration :

Premier cas.

Si M n'est fonction que de x et N de y, les variables sont dites *séparées* et l'intégrale de l'équation est

$$\int M dx + \int N dy = C.$$

Peuvent se ramener à ce cas :

1° Les équations de la forme

$$\varphi(x)\psi_1(y)\,dx + \varphi_1(x)\psi(y)\,dy = 0.$$

Car en divisant les deux membres par $\varphi_1(x) \cdot \psi_1(y)$, on trouve :

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}dx + \frac{\psi(y)}{\psi_1(y)}dy = 0.$$

2° Les équations *homogènes*, c'est-à-dire celles dans lesquelles M et N sont des fonctions homogènes et de même degré de x et de y.

La séparation des variables s'obtient en posant $y = xt$, t étant une nouvelle variable.

Au nombre des équations homogènes, comptons celles qui, ne l'étant pas d'abord, peuvent le devenir par certains procédés.

Exemple I.

Soit l'équation $\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0$, dans laquelle les variables sont séparées. L'intégrale est

$$\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{1+y^2} = C,$$

ou, en remplaçant C par arc tang C,

$$\text{arc tang } x + \text{arc tang } y = \text{arc tang } C,$$

ou encore,

$$\text{arc tang } \frac{x-y}{1-xy} = \text{arc tang } C.$$

D'où

$$\frac{x+y}{1-xy} = C.$$

Exemple II.

Soit l'équation

$$(x^2+a^2)(y^2+b^2)\,dx+(x^2-a^2)(y^2-b^2)\,dy=0.$$

La division des deux membres par $(x^2-a^2)(y^2+b^2)$ donne, variables séparées,

$$\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}\,dx+\frac{y^2-b^2}{y^2+b^2}\,dy=0,$$

ou

$$\left(1+\frac{2a^2}{x^2-a^2}\right)dx+\left(1-\frac{2b^2}{y^2+b^2}\right)dy=0.$$

Sous cette forme, l'équation fournit facilement pour intégrale :

$$x+y+a\log\frac{x-a}{x+a}-2b\,\text{arc tang}\,\frac{y}{b}=\text{C}.$$

Exemple III.

Soit l'équation homogène

$$xdy-ydx=\sqrt{y^2-x^2}\,dx.$$

Si l'on pose $y=xt$, d'où $dy=xdt+tdx$, l'équation devient :

$$x(xdt+tdx)-tx\,dx=\sqrt{t^2x^2-x^2}\,dx,$$

puis, en divisant par x et réduisant :

$$xdt=\sqrt{t^2-1}\,dx.$$

D'où

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}.$$

L'intégrale est

$$\log x = \log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) + \log C,$$

ou

$$\frac{x}{C} = t + \sqrt{t^2 - 1}.$$

Or, $t = \frac{y}{x}$, donc

$$\frac{x}{C} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$$

Cette équation, rendue rationnelle, donne pour forme la plus simple de l'intégrale :

$$x^2 = C(2y - C).$$

Exemple IV.

Soit l'équation

$$(5x - 4y - 7)\,dx + (2x + 3y - 12)\,dy = 0.$$

Pour la rendre homogène, posons d'abord

$$x = x' + \alpha \qquad \text{et} \qquad y = y' + \beta,$$

x' et y' étant de nouvelles variables; α et β des constantes à déterminer.

L'équation devient

$$(5x' - 4y' + 5\alpha - 4\beta - 7)\,dx' + (2x' + 3y' + 2\alpha + 3\beta - 12)\,dy' = 0.$$

Posons ensuite

$$\left\{\begin{array}{l} 5\alpha - 4\beta - 7 = 0, \\ 2\alpha + 3\beta - 12 = 0, \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \alpha = 3 \quad \text{et} \quad \beta = 2,$$

et nous trouvons :

$$(5x' - 4y')\,dx' + (2x' + 3y')\,dy' = 0,$$

équation homogène.

Faisons donc $y' = x't$, et, la séparation des variables effectuée, l'équation devient :

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{(3t+2)\,dt}{3t^2 - 2t + 5} = 0,$$

ou

$$\frac{dx'}{x'} + \frac{1}{2}\frac{(6t-2)\,dt}{3t^2 - 2t + 5} + \frac{3dt}{3t^2 - 2t + 5} = 0.$$

L'intégrale est

$$\log x' + \log(3t^2 - 2t + 5)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tang} \frac{3t-1}{\sqrt{14}} = C,$$

ou, en remplaçant t par $\frac{y'}{x'}$,

$$\log(3y'^2 - 2x'y' + 5x'^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tang} \frac{3y' - x'}{x'\sqrt{14}} = C.$$

Or, $x' = x - 3$ et $y' = y - 2$. Par substitution, l'intégrale cherchée est donc

$$\log[3(y-2)^2 - 2(x-3)(y-2) + 5(x-3)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arc\,tang} \frac{3(y-2) - (x-3)}{(x-3)\sqrt{14}} = C.$$

Deuxième cas.

Si $Mdx + Ndy$ est la différentielle totale d'une fonction u, c'est-à-dire si $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, on déterminera u comme au chapitre XI, et l'intégrale de l'équation différentielle sera

$$u = C.$$

Si la condition d'intégrabilité $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ n'est point remplie, la théorie enseigne qu'il existe toujours un facteur v, en général fonction de x et de y, tel que l'équation

$v(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = 0$ soit intégrable. Seulement, la détermination de v dépendant de l'intégration d'une équation différentielle difficile à effectuer, — si ce n'est dans quelques cas particuliers, — on doit s'exercer à trouver ce facteur sans règle, par l'inspection attentive de l'équation différentielle proposée.

Une exception : Si l'équation est homogène et que l'expression $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ ne satisfasse pas à la condition d'intégrabilité, on a :

$$v = \frac{1}{\mathrm{M}x + \mathrm{N}y}.$$

Exemple I.

Soit l'équation $2xdy + 3ydx = xy\,dy$.

Il est facile de voir qu'en multipliant les deux membres par $\frac{1}{xy}$, il vient :

$$2\frac{dy}{y} + 3\frac{dx}{x} = dy,$$

et, par intégration,

$$2 \log y + 3 \log x = y + \log \mathrm{C}.$$

D'où

$$\log \frac{x^3y^2}{\mathrm{C}} = y,$$

et

$$x^3y^2 = \mathrm{C}e^y.$$

Exemple II.

Reprenons l'équation homogène

$$xdy - ydx = \sqrt{y^2 - x^2}\,dx$$

donnée comme exemple du premier cas.

En l'écrivant comme suit :

$$\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)dx - xdy = 0,$$

il est aisé de s'assurer que le premier membre n'est point différentielle exacte.

Mais ici,

$$v = \frac{1}{Mx+Ny} = \frac{1}{\left(y+\sqrt{y^2-x^2}\right)x - x\,.\,y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-x^2}}.$$

Donc l'équation

$$\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x\sqrt{y^2-x^2}}dx - \frac{xdy}{x\sqrt{y^2-x^2}} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y}{x\sqrt{y^2-x^2}}\right)dx - \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}dy = 0$$

est intégrable.

Si l'on intègre le premier membre par la formule connue

$$u = \int Ndy + \int\left(M - \frac{d\int Ndy}{dx}\right)dx,$$

on trouve

$$u = -\log\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x} + \log x.$$

Donc l'intégrale de l'équation proposée est

$$-\log\frac{y+\sqrt{y^2-x^2}}{x} + \log x = \log C,$$

ou

$$\frac{x}{C} = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}$$

comme précédemment.

Nota. — Toute équation homogène $Mdx + Ndy = 0$ peut donc s'intégrer par la méthode du premier cas et par celle du second.

Troisième cas.

Si l'équation est *linéaire*, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q,$$

ou

$$dy + Pydx = Qdx, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

P et Q étant des fonctions de x seulement, l'intégrale est

$$y = e^{-\int Pdx}\left[\int e^{\int Pdx} Qdx + C\right]. \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Observons que les équations de la forme

$$dy + Pydy = Qy^n dx$$

peuvent être ramenées au cas dont il s'agit, car la division des deux membres par y^n donne :

$$\frac{dy}{y^n} + \frac{1}{y^{n-1}} Pdx = Qdx;$$

et, si l'on pose $\frac{dy}{y^n} = dz$, d'où $\frac{1}{y^n - 1} = -(n-1)z$, on trouve :

$$dz - (n-1) Pzdx = Qdx,$$

équation linéaire.

Exemple I.

Soit l'équation $dy + xydx = x^3dx$.

Si on la compare à l'équation (1), on trouve :

$$P = x \quad \text{et} \quad Q = x^3.$$

Donc $\int Pdx = \int xdx = \frac{x^2}{2}$.

L'intégrale de l'équation proposée, formule (2), est, par suite :

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[\int e^{\frac{x^2}{2}} x^3 \, dx + C \right].$$

Or, l'intégration par parties fournit :

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} x^3 \, dx = e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 - 2).$$

D'où

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[e^{\frac{x^2}{2}} (x^2 - 2) + C \right],$$

ou

$$y = x^2 - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Exemple II.

Soit l'équation

$$dy - \frac{xydx}{x^2 - 1} = xdx.$$

Ici,

$$\int Pdx = -\int \frac{xdx}{x^2 - 1} = -\log \sqrt{x^2 - 1},$$

et

$$e^{-\int Pdx} = e^{\log \sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{x_2 - 1}.$$

L'intégrale est donc

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \left(\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 1}} + C \right),$$

ou

$$y = x^2 - 1 + C\sqrt{x^2 - 1}.$$

Exemple III.

Soit $dy - \frac{xydx}{3(1 - x^2)} = \frac{ay^4dx}{1 - x^2}$, équation non linéaire de la forme $dy + Pydx = Qy^n dx$.

La division des deux membres par y^4 donne :

$$\frac{dy}{y^4} - \frac{1}{y^3}\frac{xdx}{3(1-x^2)} = \frac{adx}{1-x^2},$$

et, si l'on pose $\frac{dy}{y^4} = dz$, d'où $\frac{1}{y^3} = -3z$, on trouve :

$$dz + \frac{xzdx}{1-x^2} = \frac{adx}{1-x^2},$$

équation linéaire dans laquelle

$$\int Pdx = \int \frac{xdx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\log(1-x^2) = -\log\sqrt{1-x^2},$$

et

$$e^{-\int Pdx} = e^{\log\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

L'intégrale est donc

$$z = \sqrt{1-x^2}\left[\int \frac{adx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + C\right].$$

Mais

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$ (chapitre II, section II, exemple V).

Donc

$$z = \sqrt{1-x^2}\left(\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}} + C\right),$$

ou

$$z = ax + C\sqrt{1-x^2}.$$

Remplaçant z par $-\frac{1}{3y^3}$, on trouve

$$y^3 = -\frac{1}{3\left(ax + C\sqrt{1-x^2}\right)}$$

pour intégrale de l'équation proposée.

Exercices.

1. $$\frac{dx}{1-x^2}+\frac{dy}{1-y^2}=0.$$

Intégrale :

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1}=\frac{1}{2}\log C,$$

ou

$$\frac{(x+1)(y+1)}{(x-1)(y-1)}=C.$$

2. $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0.$$

Intégrale :

$$\text{arc sin } x+\text{arc sin } y=\text{arc sin } C,$$

ou

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

3. $(x-1)(y^3-1)\,dx+(x+1)\,y^2dy=0.$

On trouve :

$$x+\log\frac{(y^3-1)^{\frac{1}{3}}}{(x+1)^2}=C.$$

4. $(x-1)(y^2-y+1)\,dx-(y+1)(x^2+x+1)\,dy=0.$

On obtient :

$$\log\sqrt{\frac{x^2+x+1}{y^2-y+1}}-\sqrt{3}\left(\text{arc tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\text{arc tang}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)=C.$$

5. $xdx+ydy=2\cos\alpha\,.\,ydx.$

Intégrale :

$$\log\sqrt{y^2-2xy\cos\alpha+x^2}+\text{cotg}\,\alpha\,.\,\text{arc tang}\frac{y-x\cos\alpha}{x\sin\alpha}=C.$$

6. $a[a(x+1)+2y]\,dx+ydy=0.$

Si l'on pose $x=x'+\alpha$, l'équation devient :

$$a[a(x'+\alpha+1)+2y]\,dx'+ydy=0,$$

et, pour $\alpha=-1$,

$$a(ax'+2y)\,dx'+ydy=0,$$

c'est-à-dire homogène.

Intégrant comme dans l'exemple III, premier cas, puis, dans le résultat, remplaçant x' par $x+1$, on trouve pour l'intégrale cherchée :

$$\log[a(x+1)+y]+\frac{a(x+1)}{a(x+1)+y}=\mathrm{C}.$$

7. $(1+x)\,dx+(e^x dx-e^{2y}dy)(1+x^2)=0.$

La division des deux membres par $1+x^2$ conduit à l'intégrale :

$$\text{arc tang}\, x+\log\sqrt{1+x^2}+e^x-\frac{1}{2}e^{2y}=\mathrm{C}.$$

8. $\sin y\cos x dx-\sin x\cos y\, dy=\text{tang}^2 y\, dy.$

Multiplier les deux membres par $\frac{1}{\sin^2 y}$.

Intégrale :

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\text{tang}\, y+\mathrm{C}.$$

9. $ydx-xdy=y^3 e^y dy.$

Multiplier les deux membres par $\frac{1}{y^2}$.

Intégrale :

$$\frac{x}{y}=(y-1)\,e^y+\mathrm{C}.$$

10. $\sqrt{1+y^2}\,dx - 2\sqrt{1+x^2}\,dy = y\sqrt{1+x^2}\,dy.$

La séparation des variables s'obtient quand on divise les deux membres par $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}$.

Intégrale :

$$x+\sqrt{1+x^2} = Ce^{\sqrt{1+y^2}}\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)^2.$$

11. $x^2dy + ydx = ax^2e^{\frac{1}{x}}\,dx.$

Si l'on divise les deux membres par x^2, l'équation devient linéaire.

Intégrale :

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

12. $dy + xydx = (x-1)\,e^{-x}\,dx.$

On trouve d'abord pour l'intégrale :

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{\frac{x^2}{2}}(x-1)\,e^{-x}\,dx + C\right].$$

Mais

$$\int e^{\frac{x^2}{2}}(x-1)\,e^{-x}\,dx = \int e^{\frac{x^2}{2}-x}(x-1)\,dx = e^{\frac{x^2}{2}-x}.$$

D'où

$$y = e^{-x} + Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

13. $dy + aydx = \cos nxdx.$

On obtient d'abord :

$$y = e^{-ax}\left(\int e^{ax}\cos nxdx + C\right),$$

et une double intégration par parties donnant :

$$\int e^{ax}\cos nxdx = \frac{e^{ax}(a\cos nx + n\sin nx)}{a^2+n^2},$$

il s'ensuit que

$$y = \frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2} + Ce^{-ax}.$$

14. $dy + \dfrac{ny\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = a\,dx.$

On trouve d'abord :

$$y = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n}\left[a\int\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n dx + C\right].$$

Pour intégrer l'expression $a\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n dx$, on la rationalise en posant

$$\sqrt{1+x^2} = z - x,$$

et l'on obtient :

$$a\int\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n dx = \frac{a}{2}\left(\frac{z^{n+1}}{n+1} + \frac{z^{n-1}}{n-1}\right).$$

Après avoir remplacé z par $\sqrt{1+x^2}+x$ et substitué le résultat dans l'expression de y, on a pour intégrale de l'équation proposée :

$$y = \frac{a}{n^2-1}\left(n\sqrt{1+x^2} - x\right) + C\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^n.$$

15. $dy - \dfrac{xy\,dx}{2(1-x^2)} = xy^2 dx.$

Intégrale :

$$y = \frac{3}{2(1-x^2) - 3C(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

16. $dy + \dfrac{ay\,dx}{6(1-x^2)} = \dfrac{1+x}{(1-x^3)\,y^5}\,dx.$

Si l'on multiplie les deux membres par y^5 et que l'on fasse $y^5dy = dz$, l'équation devient :

$$dz + \frac{azdx}{1 - x^2} = \frac{1 + x}{(1 - x)^3}\,dx.$$

Comme intégrale, on trouve d'abord :

$$z = \left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\frac{a}{2}} \left[\int \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{a}{2}} \cdot \frac{1 + x}{(1 - x)^3}\,dx + \mathrm{C}\right].$$

Pour intégrer l'expression $\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{a}{2}} \frac{1 + x}{(1 - x)^3}\,dx$, on pose $\frac{1 + x}{1 - x} = u^2$, et l'on trouve :

$$\int \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{a}{2}} \frac{1 + x}{(1 - x)^3}\,dx = \frac{1}{(a + 4)} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2.$$

Par suite,

$$z = \frac{1}{a + 4}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 + \mathrm{C}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\frac{a}{2}}.$$

Mais $z = \frac{y^6}{6}$, donc l'intégrale de l'équation proposée est

$$y^6 = \frac{6}{a + 4}\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 + 6\mathrm{C}\left(\frac{1 - x}{1 + x}\right)^{\frac{a}{2}}.$$

17. Trouver une courbe telle qu'en chacun de ses points, la sous-tangente soit double de l'abscisse.

L'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = 2x \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x}.$$

Intégrale :

$$y = \mathrm{C}x^{\frac{1}{2}}.$$

La courbe est donc une parabole dont le paramètre est $\frac{\mathrm{C}^2}{2}$.

18. Chercher la courbe telle qu'en chacun de ses points, l'angle de la tangente et du rayon vecteur soit constant.

Si μ désigne l'angle de la tangente et du rayon vecteur, on sait (coordonnées polaires) que

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{r}{\frac{dr}{dt}}.$$

L'équation différentielle de la courbe, si l'on pose $\operatorname{tang} \mu = \frac{1}{k}$, est donc

$$\frac{r}{\frac{dr}{dt}} = \frac{1}{k} \qquad \text{ou} \qquad \frac{dr}{r} = k dt.$$

Intégrale :

$$\log r = kt + \log C \qquad \text{ou} \qquad r = Ce^{kt}.$$

La courbe cherchée est donc une spirale logarithmique.

19. Soient x et y les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une courbe. Si, à la distance x de l'axe des abscisses, on mène une parallèle à cet axe, et que la portion de cette parallèle comprise entre l'ordonnée y et la tangente au point (x, y) soit constante, quelle est la courbe?

L'équation différentielle de la courbe, si l'on désigne la constante par a, est

$$\frac{y - x}{a} = \frac{dy}{dx},$$

ou

$$dy - \frac{y}{a} dx = -\frac{x}{a} dx;$$

équation linéaire dont l'intégrale est

$$y = x + a + Ce^{\frac{x}{a}}.$$

20. Trouver les trajectoires orthogonales des paraboles dont l'équation est $y^2 = 2px$, p étant un paramètre variable.

Rappelons d'abord ce qu'on entend par *trajectoires*, et comment on obtient leur équation différentielle.

Étant donnée une famille de courbes représentées par une équation qui contient un paramètre variable, on appelle *trajectoires*, les lignes qui coupent les courbes sous un angle constant.

Quand l'angle constant est droit, les trajectoires sont dites *orthogonales*.

Soient x, y les coordonnées du point de rencontre de l'une des courbes et de l'une des trajectoires, et, par ce point, soient menées une tangente à la courbe et, une autre, à la trajectoire. Si α et α' désignent les coefficients angulaires des tangentes et V la tangente trigonométrique de leur angle, il faut qu'on ait :

$$V = \frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'}; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et si, entre cette équation et celle des courbes, on élimine le paramètre variable, on obtient l'équation différentielle des trajectoires. Celle des trajectoires orthogonales s'obtient en éliminant le paramètre entre l'équation des courbes et la suivante :

$$1 + \alpha\alpha' = 0.$$

Cela rappelé, revenons à la question posée.

L'élimination de p entre les équations

$$y^2 = 2px \qquad \text{et} \qquad 1 + \alpha\alpha' = 0$$

fournit, après avoir remplacé α par $\frac{p}{y}$ et α' par $\frac{dy}{dx}$:

$$y\left(1 + \frac{y}{2x}\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

C'est l'équation différentielle des trajectoires orthogonales cherchées.

On peut satisfaire à cette équation :

1° En posant $y = 0$. L'axe des abscisses est donc trajectoire orthogonale.

2° En posant $1 + \frac{y}{2x}\frac{dy}{dx} = 0$.

Intégrale :

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1.$$

Équation d'ellipses dont le centre est le sommet commun des paraboles.

21. Trouver les courbes qui coupent toutes les droites passant par un même point sous l'angle de 45°.

Prenons pour origine le point commun des droites et, pour axes, les côtés d'un angle droit dont l'origine est le sommet.

L'équation des droites sera $y = mx$, m étant le paramètre variable.

L'élimination de m entre les équations

$$y = mx \qquad \text{et} \qquad 1 = \frac{\alpha' - \alpha}{1 + \alpha\alpha'}$$

donne pour équation différentielle des trajectoires demandées

$$xdx + ydy = xdy - ydx.$$

Si l'on multiplie les deux membres par $\frac{1}{x^2 + y^2}$, on obtient pour intégrale :

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} = \text{arc tang}\,\frac{y}{x} + \log C;$$

puis, si l'on pose $x = r\cos t$ et $y = r\sin t$, pour passer à des coordonnées polaires dont le pôle est l'origine et l'axe des x, l'axe polaire

$$\log r = t + \log C,$$

ou

$$r = Ce^t.$$

Les trajectoires sont donc des spirales logarithmiques.

SECTION II. — *Équations dans lesquelles la dérivée est d'un degré supérieur au premier.*

Dans l'intégration des équations différentielles du premier ordre à deux variables, de la forme

$$f\left[x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0,$$

et renfermant $\frac{dy}{dx}$ à des puissances supérieures à la première, on distingue trois cas principaux.

Premier cas.

Si l'équation peut être résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, la résolution fournit n équations de la forme $Mdx + Ndy = 0$; et, si les intégrales de ces n équations sont :

$$F_1(x, y, C) = 0,$$
$$F_2(x, y, C) = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$F_n(x, y, C) = 0,$$

l'intégrale de l'équation proposée est

$$F_1(x, y, C) \,.\, F_2(x, y, C) \ldots F_n(x, y, C) = 0.$$

Deuxième cas.

Si l'équation est homogène par rapport à x et y, on pose $y = tx$ et $\frac{dy}{dx} = p$, ce qui la réduit à la forme

$$f(p, t) = 0; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et comme d'ailleurs la différentielle de l'équation $y = tx$, après qu'on y a remplacé dy par pdx, donne :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{p - t}, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

on arrive souvent à l'intégrale cherchée comme suit :

1° Si de l'équation (1) on tire t en fonction de p, la substitution dans l'équation (2) donne, par intégration, une expression de x en p, et, par suite, l'équation $y = tx$ en fournit une autre de y en p.

L'élimination de p entre ces deux expressions de x et de y fournit l'intégrale demandée.

2° Si de l'équation (1) on tire p en fonction de t, on obtient de la même manière deux expressions de x et de y en t, et l'élimination de t entre ces deux expressions donne l'intégrale.

De ces deux moyens, on devra évidemment employer le plus simple.

Troisième cas.

Si l'équation peut être résolue par rapport à y ou x, on l'obtient sous l'une ou l'autre des formes :

$$y = f(x, p) \qquad \text{ou} \qquad x = f(y, p);$$

et la *différentiation* conduit à une équation différentielle du premier ordre par rapport aux variables x, p ou y, p.

En admettant que cette équation puisse s'intégrer, il suffit d'éliminer p entre l'intégrale obtenue et l'équation proposée, pour obtenir l'intégrale cherchée.

Pour aider à ce qui suit, rappelons ici deux de ces équations, troisième cas, traitées dans les cours.

Si l'on différentie la première, laquelle est

$$y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

et que, dans le résultat, on remplace dy par pdx, on obtient l'équation linéaire

$$dx - \frac{x\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}dp = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}dp.$$

Si l'on fait de même pour la seconde

$$y = px + \psi(p) \text{ (*)},$$

on trouve :

$$[x + \psi'(p)]\,dp = 0,$$

équation à laquelle on peut satisfaire :

1° En posant $dp = 0$, d'où $p = C$.

Donc il suffira de remplacer p par C dans l'équation $y = px + \varphi(p)$ pour en obtenir l'intégrale générale :

$$y = Cx + \psi(C).$$

2° En posant $x + \psi'(p) = 0$, d'où $p = f(x)$, une fonction déterminée de x.

Dans ce cas, l'élimination de p entre les équations $p = f(x)$ et $y = px + \psi(p)$ donne

$$y = xf(x) + \psi[f(x)],$$

c'est-à-dire une *solution singulière;* car on sait que l'on appelle ainsi, toute intégrale d'une équation différentielle qui satisfait à celle-ci, mais qui ne peut se déduire de l'intégrale générale, quelque valeur constante particulière que l'on attribue à C.

Fermons ces notions préliminaires en rappelant comment on obtient, en général, les solutions singulières des équations différentielles du premier ordre, à deux variables.

(*) Cette équation est dite *forme Clairaut,* du nom du mathématicien qui, le premier, a intégré par différentiation.

M. PAUL MANSION, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (1877), a prouvé que toute équation différentielle du premier ordre peut se ramener à une équation de Clairaut.

Deux moyens :

Ou bien dériver l'équation différentielle proposée par rapport à p, puis éliminer p entre l'équation résultante et la proposée.

Ou bien dériver par rapport à C l'intégrale générale de l'équation différentielle, puis éliminer C entre l'équation ainsi obtenue et l'intégrale générale.

Que l'on emploie le premier procédé ou le second, le résultat de l'élimination finale ne sera solution singulière que s'il satisfait à l'équation différentielle donnée, et s'il ne peut se tirer de l'intégrale générale en prêtant à C telle ou telle valeur numérique particulière.

Il faudra toujours s'assurer qu'il en est ainsi.

Exemple.

Chercher l'intégrale de l'équation différentielle

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

On voit tout de suite que l'équation est intégrable par chacun des trois procédés rappelés plus haut.

1° Résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, elle donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y},$$

et par conséquent peut s'écrire :

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}\right) = 0;$$

d'où résultent les équations différentielles :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x-\sqrt{x^2+y^2}}{y} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{ydy+xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} = dx;$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x + \sqrt{x^2 + x^2}}{y} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{ydy + xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -dx.$$

Les intégrales sont :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + C$$

et

$$\sqrt{x^2 + y^2} = -x + C.$$

L'intégrale complète de l'équation proposée est donc

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x - C\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + x - C\right) = 0,$$

ou

$$y^2 = C(C \pm 2x).$$

2° Puisque l'équation proposée est homogène en x, y, posons $\frac{dy}{dx} = p$ et $y = tx$; elle devient

$$p^2 t + 2p - t = 0, \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{2p}{1 - p^2},$$

et, par suite,

$$dt = 2\frac{1 + p^2}{(1 - p^2)^2}dp \qquad \text{et} \qquad p - t = -\frac{p(p^2 + 1)}{1 - p^2}.$$

Substituant ces expressions de dt et de $p - t$ dans l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{p - t} \text{ (voir le deuxième cas),}$$

on obtient :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p(1 - p^2)},$$

et, par intégration,

$$x = \frac{C(1 - p^2)}{p^2}.$$

Donc

$$y = tx = \frac{2C}{p}.$$

Entre ces deux expressions de x et de y, éliminant p, on trouve pour intégrale de l'équation donnée :

$$y^2 = 4C(x + C).$$

Si l'on remplace C par $\frac{C}{2}$,

$$y^2 = C(2x + C),$$

comme précédemment.

3° L'équation proposée, résolue par rapport à y, donne :

$$y = \frac{2px}{1 - p^2}.$$

Si l'on différentie et que l'on remplace dy par pdx, on trouve :

$$\frac{dx}{x} = -\frac{2dp}{p(1 - p^2)},$$

et, par intégration,

$$x = \frac{C(1 - p^2)}{p^2}.$$

Par suite,

$$y = \frac{2px}{1 - p^2} = \frac{2p}{1 - p^2} \times \frac{C(1 - p^2)}{p^2} = \frac{2C}{p}.$$

Mêmes expressions de x et de y que dans le 2° et, par élimination de p entre elles deux, même intégrale cherchée :

$$y^2 = 4C(x + C).$$

Le calcul eût été plus simple encore, si l'on avait tiré de l'équation la valeur de x,

$$x = \frac{y(1 - p^2)}{2p}.$$

Après différentiation et remplacement de dx par $\frac{dy}{p}$, on eût trouvé :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dp}{p},$$

et, par intégration,

$$y = \frac{C}{p}.$$

D'où

$$x = \frac{C(1-p^2)}{2p^2}.$$

L'élimination de p entre ces deux valeurs de x et de y donne

$$y^2 = C(C+2x).$$

Cherchons s'il existe une solution singulière.

Premier moyen. — Si l'on dérive par rapport à p l'équation différentielle proposée

$$p^2y + 2px - y = 0,$$

on trouve :

$$py + x = 0,$$

et l'élimination de p entre ces deux équations fournit :

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Deuxième moyen. — Si l'on dérive par rapport à C l'intégrale générale

$$y^2 = 4C(x + C),$$

on obtient :

$$x + 2C = 0;$$

et si l'on élimine C entre ces équations, on trouve encore

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Ce résultat $x^2 + y^2 = 0$ est solution singulière : car il satisfait à l'équation différentielle proposée, il est facile de le vérifier, et il ne peut être tiré de l'intégrale générale, quelque valeur constante particulière que l'on attribue à C.

Exercices.

1. $y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9a^2 = 0.$

Intégrale complète :

$$(y^2 - C)^2 = 36a^2x^2.$$

2. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{x^2 + y^2}{xy}\frac{dy}{dx} + 1 = 0.$

Intégrale :

$$(y - Cx)(y^2 - x^2 - C) = 0.$$

3. $(1 + x^2)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$

Intégrale :

$$(y - C)^2 = (\text{arc tang } x)^2.$$

4. $(1 + x^2)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + x(1 + x^2)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x = 0.$

L'équation peut s'écrire :

$$(1 + x^2)^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left(\frac{dy}{dx} + x\right) - \left(\frac{dy}{dx} + x\right) = 0,$$

ou

$$\left(\frac{dy}{dx} + x\right)\left[(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 1\right]\left[(1 + x^2)\frac{dy}{dx} - 1\right] = 0.$$

Par suite, on trouve facilement pour l'intégrale complète :

$$\left(y - C + \frac{x^2}{2}\right)\left[(y - C)^2 - (\text{arc tang } x)^2\right] = 0.$$

5. $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (a+b+c)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (ab+bc+ca)\frac{dy}{dx} - abc = 0.$$

A l'inspection des coefficients de l'équation dont $\frac{dy}{dx}$ est l'inconnue, on voit que les racines sont a, b et c.

Donc l'équation peut s'écrire :

$$\left(\frac{dy}{dx} - a\right)\left(\frac{dy}{dx} - b\right)\left(\frac{dy}{dx} - c\right) = 0.$$

Intégrale :

$$(y - ax - \mathrm{C})(y - bx - \mathrm{C})(y - cx - \mathrm{C}) = 0.$$

6. $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (x+y+1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x+y+xy)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

L'équation peut s'écrire

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(\frac{dy}{dx} - x\right)\left(\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Intégrale :

$$(y - x - \mathrm{C})\left(y - \frac{x^2}{2} - \mathrm{C}\right)(y - \mathrm{C}e^x) = 0$$

7. $$y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right).$$

Intégrale :

$$3y^2 + 4x^2 = (\mathrm{C} \pm x)^2.$$

8. $$(x^2 - 2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\frac{dy}{dx} - x^2 = 0.$$

Intégrale générale :

$$y^2 - 2\mathrm{C}y + x^2 = \mathrm{C}^2.$$

Solution singulière :

$$2y^2 + x^2 = 0.$$

9. $y = 2px - p^2$, équation de la forme $y = x\varphi(p) + \psi(p)$.

La différentiation, puis la substitution de pdx à y dans le résultat fournissent une équation linéaire dont l'intégrale est

$$x = \frac{2p}{3} + \frac{C}{p^2}.$$

Resterait à éliminer p entre cette expression de x et l'équation proposée pour obtenir l'intégrale demandée.

10. $y = p^2x + p^2$.

On peut traiter cette équation comme celle de l'exercice précédent, ou, plus facilement, la résoudre d'abord par rapport à p.

Intégrale :

$$\sqrt{y} = \sqrt{x+1} + C.$$

11. $y = 2px + \sqrt{1+p^2}$

Par différentiation, on trouve :

$$x = \frac{1}{2p^2}\left[\log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) - p\sqrt{1+p^2} + C\right]$$

et, par élimination de p entre les équations précédentes, l'intégrale cherchée.

12. $y = px + p(1-p)$, équation forme Clairaut.

Intégrale générale :

$$y = Cx + C(1-C).$$

Solution singulière :

$$4y = (1+x)^2.$$

13. $y = px + a(1-p^3)^{\frac{1}{3}}$.

Intégrale générale :

$$y = Cx + a(1 - C^3)^{\frac{1}{3}}.$$

Solution singulière :

$$y^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}.$$

14. $ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (2x - b)\frac{dy}{dx} - y = 0.$

Cette équation peut prendre la forme Clairaut : car si l'on multiplie les deux membres par $4y$ et que l'on fasse $y^2 = u$, d'où $2y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$, on trouve

$$a\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + (4x - 2b)\frac{du}{dx} - 4u = 0,$$

ou bien

$$u = x\frac{du}{dx} + \left[\frac{a}{4}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \frac{b}{2}\frac{du}{dx}\right].$$

L'intégrale générale est donc

$$u = Cx + \frac{a}{4}C^2 - \frac{b}{2}C,$$

ou

$$y^2 = C\left(x - \frac{b}{2} + \frac{a}{4}C\right).$$

Solution singulière :

$$4ay^2 + (2x - b)^2 = 0.$$

15. $y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + (1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$

L'équation peut s'écrire

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

D'où, en extrayant la racine carrée des deux membres et remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par p,

$$y = px + \sqrt{1 - p^2}.$$

Intégrale générale :

$$y = Cx + \sqrt{1 - C^2}.$$

Solution singulière :

$$y^2 = 1 + x^2.$$

C'est en travaillant l'équation proposée que Taylor, le premier, a constaté l'existence des solutions singulières.

16. La distance d'un point donné à chacune des tangentes d'une courbe est de longueur constante. Quelle est cette courbe?

Si, par le point donné, on mène deux axes rectangulaires, l'énoncé fournit l'équation :

$$\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} = a,$$

ou, en faisant $\dfrac{dy}{dx} = p$,

$$y = px + a\sqrt{1 + p^2},$$

équation forme Clairaut dont l'intégrale générale est

$$y = Cx + a\sqrt{1 + C^2},$$

et la solution singulière, la véritable solution,

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

équation d'un cercle de rayon a.

L'intégrale générale représente toutes les droites tangentes à ce cercle, et la solution singulière est la courbe enveloppe de ces droites.

17. Une courbe, rapportée à des axes rectangulaires, est telle qu'en chacun de ses points, la normale est de même

longueur que celle de la droite menée du point à l'origine. Quelle est cette courbe?

La question conduit à l'équation

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Si l'on élève les deux membres au carré, on trouve

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x^2}{y^2},$$

équation dont l'intégrale est

$$(y^2-x^2-\mathrm{C})(y^2+x^2-\mathrm{C})=0.$$

On satisfait à ce résultat : soit en posant $y^2-x^2-\mathrm{C}=0$, ce qui donne pour la courbe cherchée une hyperbole équilatère; soit en posant $y^2+x^2-\mathrm{C}=0$, ce qui donne un cercle.

18. Trouver une courbe telle que la partie de chacune de ses tangentes comprise entre deux droites rectangulaires soit d'une longueur constante a.

Si l'on prend les droites rectangulaires comme axes des coordonnées, l'énoncé fournit l'équation, forme Clairaut :

$$y=px+\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$

L'intégrale générale est donc :

$$y=\mathrm{C}x+\frac{a\mathrm{C}}{\sqrt{1+\mathrm{C}^2}}.$$

Pour solution singulière, on trouve :

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

équation d'une cycloïde engendrée par un cercle de rayon $\frac{a}{4}$ roulant dans l'intérieur d'un cercle de rayon a (fig. 6).

19. On donne deux droites parallèles D et D′; un point A sur la première, un point A′ sur la seconde. Chercher une courbe telle que, pour une quelconque de ses tangentes rencontrant D et D′ aux points B et B′, le produit des segments AB et A′B′ soit quantité constante b^2.

Soit $2a$ la droite qui joint les points A et A′; prenons le milieu de cette droite comme origine, la droite elle-même pour axe des x et une droite parallèle à D et à D′ pour axe des y.

La traduction de l'énoncé en équation est

$$(y - px)^2 - a^2p^2 = \pm b^2,$$

le signe $+$ du second membre se rapportant au cas où les deux segments sont d'un même côté de l'axe des x et le signe $-$ au cas où ils sont de côtés différents.

L'équation précédente donne, forme Clairaut,

$$y = px + \sqrt{a^2p^2 \pm b^2}.$$

L'intégrale générale est, par conséquent,

$$y = Cx + \sqrt{a^2C^2 \pm b^2}.$$

La solution singulière est

$$\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{x^2}{} = \pm 1.$$

La courbe cherchée est donc une ellipse ou une hyperbole.

20. Une courbe rapportée à des axes rectangulaires est telle qu'en chacun de ses points, la longueur de la normale et la distance du pied de celle-ci à l'origine sont dans un rapport constant a. Quelle est cette courbe?

L'énoncé fournit l'équation :

$$\frac{y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{x + y\frac{dy}{dx}} = a.$$

D'où l'on tire, après avoir élevé les deux membres au carré,

$$(a^2-1)\,y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2a^2x\,.\,y\frac{dy}{dx}=y^2-a^2x^2.$$

Si l'on résout cette équation de nouvelle forme, par rapport à $y\dfrac{dy}{dx}$ comme inconnue, on trouve

$$y\frac{dy}{dx}=\frac{-a^2x\pm\sqrt{(a^2-1)\,y^2+a^2x^2}}{a^2-1}.$$

D'où,

$$\frac{(a^2-1)\,y\dfrac{dy}{dx}+a^2x}{\sqrt{(a^2-1)\,y^2+a^2x^2}}=\pm 1,$$

et, par intégration,

$$\sqrt{(a^2-1)\,y^2+a^2x^2}=C\pm x,$$

ou bien

$$(a^2-1)(y^2+x^2)=C^2\pm 2Cx,$$

équation d'une suite de cercles.

Pour $a=1$, on trouve $x=\pm\dfrac{C}{2}$, équation d'une droite quelconque parallèle à l'axe des y.

CHAPITRE XIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER ET A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Section I. — *Équations sans second membre.*

La forme générale de ces équations est

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+A_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+A_1\frac{dy}{dx}+A_0y=0, \quad (1)$$

A_{n-1}, A_{n-2}, … A_1, A_0 étant des coefficients constants.

Si, dans les équations de cette forme, on fait $y = ue^{ax}$, u représentant une fonction indéterminée de x et a une quantité constante, on trouve :

$$uf(a) + \frac{du}{dx}\frac{f'(a)}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{f''(a)}{1.2} + \cdots + \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{f^{(n-1)}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)} + \frac{d^nu}{dx^n} = 0,$$

transformée dans laquelle $f(a)$ représente le polynôme :

$$a^n + A_{n-1}a^{n-1} + A_{n-2}a^{n-2} + \cdots + A_1a + A_0.$$

Notons avec soin que pour obtenir ce polynôme, il suffit de remplacer dans l'équation (1) : $\frac{d^ny}{dx^n}$ par a^n, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ par a^{n-1}, etc., et y par a^0 ou 1.

Cela posé, si l'on égale à 0 le polynôme, ce qui produit l'*équation auxiliaire*

$$a^n + A_{n-1}a^{n-1} + A_{n-2}a^{n-2} + \cdots + A_1a + A_0 = 0, \qquad (2)$$

il y a quatre cas particuliers à considérer.

Premier cas.

Si les racines de l'équation (2) sont réelles et inégales, en les représentant par a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$y = C_1e^{a_1x} + C_2e^{a_2x} + C_3e^{a_3x} + \cdots C_ne^{a_nx},$$

C_1, C_2, C_3, ... C_n représentant les n constantes arbitraires.

Deuxième cas.

Si les racines sont imaginaires et inégales, et qu'on les représente par

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}\\ \alpha_1 - \beta_1\sqrt{-1}\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l}\alpha_2 + \beta_2\sqrt{-1}\\ \alpha_2 - \beta_2\sqrt{-1}\end{array}\right., \text{ etc.,}$$

l'intégrale générale de l'équation (1) est

$$y = e^{\alpha_1 x}(C_1 \cos \beta_1 x + C_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(C_3 \cos \beta_2 x + C_4 \sin \beta_2 x) + \text{etc.}$$

Nota. — Pour chaque couple de racines imaginaires, l'intégrale contient donc une expression de la forme :

$$e^{\alpha x}(C \cos \beta x + C' \sin \beta x).$$

On peut simplifier cette expression de plusieurs manières : si l'on y pose, par exemple,

$$C = A \cos \lambda \qquad \text{et} \qquad C' = -A \sin \lambda,$$

elle devient

$$Ae^{\alpha x} \cos (\beta x + \lambda).$$

Dans tout ce chapitre, nous avons trouvé bon de conserver la forme première et de laisser aux élèves de simplifier suivant la manière adoptée dans le cours.

Troisième cas.

Si les n racines sont réelles et égales, en les représentant toutes par a_1, l'intégrale générale cherchée est

$$y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_n x^{n-1})\, e^{a_1 x}.$$

Quatrième cas.

Si les racines sont imaginaires et égales, en représentant chaque couple de ces racines par

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \sqrt{-1}, \\ \alpha_1 - \beta_1 \sqrt{-1}, \end{cases}$$

l'intégrale générale sera pour deux couples :

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[(C_1 + C_2 x) \cos \beta_1 x + (C_3 + C_4 x) \sin \beta_1 x\right];$$

pour trois couples :

$$y = e^{\alpha_1 x}\left[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \cos \beta_1 x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) \sin \beta_1 x\right];$$

et ainsi de suite.

Cas général.

Si les racines de l'équation auxiliaire sont de différentes sortes, l'intégrale générale de l'équation (1) se composera de la somme des résultats que l'on trouve en appliquant à chaque sorte de racines le cas particulier convenable.

Si le second membre de l'équation (1), au lieu d'être nul, était une quantité constante, on opérerait d'abord comme si le second membre était 0, puis, au résultat, on ajouterait le quotient de la quantité constante divisée par le coefficient de y.

Exemple.

$$\frac{d^6y}{dx^6}-11\frac{d^5y}{dx^5}+49\frac{d^4y}{dx^4}-115\frac{d^3y}{dx^3}+154\frac{d^2y}{dx^2}-114\frac{dy}{dx}+36y=0.$$

L'équation auxiliaire est

$$a^6-11a^5+49a^4-115a^3+154a^2-114a+36=0.$$

Elle a :

Deux racines réelles et inégales, 1 et 2.

Id. id. égales, 3 et 3.

Id. imaginaires $1+\sqrt{-1}$ et $1-\sqrt{-1}$.

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc :

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(C_3+C_4x)\,e^{3x}+e^x(C_5\cos x+C_6\sin x),$$

ou bien

$$y=e^x[C_1+C_2e^x+(C_3+C_4x)\,e^{2x}+C_5\cos x+C_6\sin x].$$

Exercices.

1. $6\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = 0.$

Intégrale :

$$y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{-\frac{x}{3}}.$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2m\frac{dy}{dx} + (m^2 - n^2)y = m - n.$

Intégrale :

$$y = C_1 e^{(m+n)x} + C_2 e^{(m-n)x} + \frac{1}{m+n}.$$

3. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0.$

Intégrale :

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x)e^x.$$

4. $\frac{d^3y}{dx^3} - (3m^2 - n^2)\frac{dy}{dx} + 2m(m^2 + n^2)y = 0.$

Intégrale :

$$y = e^{mx}(C_1 \cos nx + C_2 \sin nx) + C_3 e^{-2mx}.$$

5. $\frac{d^4y}{dx^4} - m^2 y = 0.$

Intégrale :

$$y = C_1 e^{x\sqrt{m}} + C_2 e^{-x\sqrt{m}} + C_3 \cos x\sqrt{m} + C_4 \sin x\sqrt{m}.$$

6. $\frac{d^4y}{dx^4} - 12\frac{d^3y}{dx^3} + 62\frac{d^2y}{dx^2} - 156\frac{dy}{dx} + 169y = 0.$

Intégrale :

$$y = e^{3x}\left[(C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x\right].$$

7. $$\frac{d^5y}{dx^5} - 3m\frac{d^4y}{dx^4} + 4m^2\frac{d^3y}{dx^3} - 4m^3\frac{d^2y}{dx^2} + 3m^4\frac{dy}{dx} - m^5y = 0.$$

Intégrale :

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\,e^{mx} + C_4\cos mx + C_5\sin mx.$$

8. $$\frac{d^7y}{dx^7} - \frac{d^5y}{dx^5} - 2\frac{d^4y}{dx^4} - 5\frac{d^3y}{dx^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 2y = 4m.$$

Intégrale :

$$y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x + (C_5 + C_6x)\,e^{-x} + C_7e^{2x} - 2m.$$

Section II. — *Équations avec second membre.*

La forme générale de ces équations est

$$\frac{d^ny}{dx^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + A_1\frac{dy}{dx} + A_0y = X,$$

A_{n-1}, A_{n-2} ... A_1, A_0 étant des coefficients constants et X une fonction de x.

Rappelons les deux méthodes principales traitées dans les cours pour obtenir l'intégrale générale de ces sortes d'équations.

1° Méthode de la variation des constantes arbitraires ou méthode Lagrange.

Si l'équation est de deuxième ordre, ou de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A_1\frac{dy}{dx} + A_0y = X,$$

et que l'on représente par y_1 et y_2 les intégrales particulières de l'équation sans second membre, l'intégrale générale de l'équation pourvue de son second membre est

$$y = C_1y_1 + C_2y_2,$$

mais à la condition de considérer C_1 et C_2 comme des fonctions de x qu'il faut déterminer par le système d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dC_1}{dx}y_1 + \frac{dC_2}{dx}y_2 = 0, \\ &\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} = X. \end{aligned}\right.$$

Si l'équation est de troisième ordre, c'est-à-dire de la forme

$$\frac{d^3y}{dx^3} + A_2\frac{d^2y}{dx^2} + A_1\frac{dy}{dx} + A_0y = X,$$

et que l'on désigne par y_1, y_2, y_3 les intégrales particulières de l'équation prise sans second membre, l'intégrale générale cherchée sera

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3,$$

à la condition de considérer C_1, C_2 et C_3 comme des fonctions de x qui doivent être déterminées par le système d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dC_1}{dx}y_1 + \frac{dC_2}{dx}y_2 + \frac{dC_3}{dx}y_3 = 0, \\ &\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} + \frac{dC_3}{dx}\frac{dy_3}{dx} = 0, \\ &\frac{dC_1}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{dC_2}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dC_3}{dx}\frac{d^2y_3}{dx^2} = X, \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

2° Méthode de coefficients indéterminés.

La théorie prouve que pour obtenir l'intégrale générale de l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une intégrale particulière de cette équation à l'intégrale générale de l'équation sans second membre.

Or, la méthode des coefficients indéterminés permet d'obtenir une intégrale particulière de l'équation avec

second membre, quand celui-ci est une fonction entière de x,

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + Lx + M.$$

Dans ce cas, si l'on représente par Y l'intégrale particulière cherchée, et par α, β, ... λ, μ, des coefficients indéterminés, on pose :

$$Y = \alpha x^m + \beta x^{m-1} + \cdots + \lambda x + \mu,$$

puis, substituant Y et ses n premières dérivées dans l'équation proposée, on obtient, en identifiant les deux membres de l'équation résultante, les valeurs de α, β, etc., valeurs qui, substituées à leur tour dans l'expression de Y, fournissent l'intégrale particulière.

On peut encore obtenir une intégrale particulière de l'équation avec second membre, quand celui-ci est de l'une des formes :

$$A \sin mx, \qquad A \cos mx;$$

et

$$Ae^{mx}.$$

On pose alors respectivement :

$$Y = \alpha \sin mx + \beta \cos mx,$$

et

$$Y = \alpha e^{mx};$$

puis on détermine α et β, comme plus haut.

Exemple.

Soit l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = x^3.$$

Intégrons-la d'abord par la méthode de la variation des constantes.

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x};$$

et cette même équation sera l'intégrale générale de la proposée, à la condition d'y considérer C_1, C_2 et C_3 comme des fonctions de x qu'il faut déterminer par le système d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dC_1}{dx}e^{x}+\frac{dC_2}{dx}e^{-x}+\frac{dC_3}{dx}e^{2x}=0,\\ &\frac{dC_1}{dx}e^{x}-\frac{dC_2}{dx}e^{-x}+2\frac{dC_3}{dx}e^{2x}=0,\\ &\frac{dC_1}{dx}e^{x}+\frac{dC_2}{dx}e^{-x}+4\frac{dC_3}{dx}e^{2x}=x^3.\end{aligned}\right.$$

De ces équations, on tire :

$$\frac{dC_1}{dx}=-\frac{1}{2}x^3e^{-x}, \qquad C_1=-\frac{1}{2}\int x^3e^{-x}\,dx,$$

$$\frac{dC_2}{dx}=\frac{1}{6}x^3e^{x}, \qquad \text{d'où} \qquad C_2=\frac{1}{6}\int x^3e^{x}\,dx,$$

$$\frac{dC_3}{dx}=\frac{1}{3}x^3e^{-2x}. \qquad C_3=\frac{1}{3}\int x^3e^{-2x}\,dx.$$

Puis, l'intégration par parties donne :

$$C_1=A_1+\frac{1}{2}e^{-x}(x^3+3x^2+6x+6),$$

$$C_2=A_2+\frac{1}{6}e^{x}(x^3-3x^2+6x-6),$$

$$C_3=A_3-\frac{1}{3}e^{-2x}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{3}{8}\right),$$

A_1, A_2 et A_3 étant les constantes qui généralisent les intégrales.

Substituant les expressions de C_1, C_2 et C_3 dans l'équation

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x},$$

on trouve pour l'intégrale générale cherchée :

$$y=A_1e^{x}+A_2e^{-x}+A_3e^{2x}+\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2}{4}+\frac{15x}{4}+\frac{15}{8}.$$

Intégrons, en second lieu, l'équation proposée par la méthode des coefficients indéterminés. Puisque le second membre est x^3, posons :

$$Y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

D'où

$$\frac{dY}{dx} = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma,$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = 6\alpha x + 2\beta,$$

$$\frac{d^3Y}{dx^3} = 6\alpha.$$

Substituant les valeurs de Y et de ses dérivées dans l'équation proposée, on trouve :

$$6\alpha - 12\alpha x - 4\beta - 3\alpha x^2 - 2\beta x - \gamma + 2\alpha x^3 + 2\beta x^2 + 2\gamma x + 2\delta = x^3.$$

Pour que les deux membres de cette équation soient identiques, il faut que

$$\begin{aligned} 2\alpha &= 1, \\ -3\alpha + 2\beta &= 0, \\ -12\alpha - 2\beta + 2\gamma &= 0, \\ 6\alpha - 4\beta - \gamma + 2\delta &= 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{3}{4}, \quad \gamma = \frac{15}{4} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{15}{8}.$$

L'intégrale particulière est donc

$$Y = \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{15x}{4} + \frac{15}{8},$$

et l'intégrale générale

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4} + \frac{15x}{4} + \frac{15}{8}.$$

On le voit, l'intégration par coefficients indéterminés est plus rapide que l'intégration par la variation des constantes.

Exercices.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = x^2 - x + 3.$

Intégrale générale :

$$y = (C_1 + C_2x)\,e^{3x} + \frac{3x^2 + x + 9}{27}.$$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \text{séc}\,x.$

Intégrale générale :

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \log(\cos x).$$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9\dfrac{dy}{dx} + 20y = e^{6x}.$

Intégrale générale :

$$y = e^{4x}\left(C_1 + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right).$$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{x}{(1+x)^2}.$

Intégrale générale :

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + e^{-2x}\int \frac{e^{2x}\,dx}{1+x}.$$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + m\dfrac{dy}{dx} - 6m^2y = n^x.$

Intégrale générale :

$$y = C_1e^{2mx} + C_2e^{-3mx} - \frac{n^x}{(3m + \log n)(2m - \log n)}.$$

6. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6.$

Intégrale générale :

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{-x} + x^3.$$

7. $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 14y = \sin x.$

Pour avoir une solution singulière, poser

$$Y = \alpha \sin x + \beta \cos x.$$

Intégrale générale :

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{7x} + \frac{\sin x}{25} + \frac{\cos x}{50}.$$

8. $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = \frac{2xe^{4x}}{(1+x)^2}.$

Intégrale générale :

$$y = e^{x}\left[C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x} + 2e^{x}\int \frac{e^{2x}dx}{1+x} - 2\int \frac{e^{3x}dx}{1+x}\right].$$

9. $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos mx.$

Pour obtenir une intégrale particulière, poser

$$Y = \alpha \cos mx.$$

Intégrale générale :

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{x} + (C_3 + C_4 x)\, e^{-x} + \frac{\cos mx}{(m^2+1)^2}.$$

10. $\frac{d^4y}{dx^4} - m^4 y = x^2 + 1.$

Intégrale générale :

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} + C_3 \cos mx + C_4 \sin mx - \frac{x^2+1}{m_4}.$$

11. $\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = Ae^{mx}.$

Intégrale générale :

$$y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x + C_5e^x + \frac{Ae^{mx}}{(m^2+1)^2(m-1)}$$

12. $\frac{d^6y}{dx^6} + 3\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = A \sin mx.$

Intégrale générale :

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)\cos x + (C_4 + C_5x + C_6x^2)\sin x - \frac{A\sin mx}{(m^2-1)^3}.$$

CHAPITRE XIV.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER ET A COEFFICIENTS VARIABLES.

La forme générale de ces équations est

$$\frac{d^ny}{dx^n} + X_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + X_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + X_1\frac{dy}{dx} + X_0y = X,$$

X_{n-1}, X_{n-2} ... X_1, X_0 et X représentant des fonctions de x.

Point de méthode générale pour intégrer ces sortes d'équations.

Intégrables, quand elles ont la forme particulière

$$(a+bx)^n\frac{d^ny}{dx^n} + A_{n-1}(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_{n-2}(a+bx)^{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$
$$+ \cdots + A_1(a+bx)\frac{dy}{dx} + A_0y = X,$$

A_{n-1}, A_{n-2}, ... A_1, A_0, ainsi que a et b, étant des constantes.

Dans ce cas, pour obtenir l'intégrale générale de telle d'entre elles, on pose d'abord

$$a + bx = e^t,$$

ce qui produit une équation transformée en y et t, linéaire, de même ordre, mais à coefficients constants; puis, dans l'intégrale de celle-ci, on remplace t par sa valeur en x (LEGENDRE, *Mémoires de l'Académie,* 1787).

Mais, en général, l'inspection attentive des équations dont il s'agit et l'habitude de l'analyse peuvent seules fournir des procédés particuliers d'intégration, procédés dont le plus fréquemment employé est le changement de variable indépendante.

Exemple I.

Soit l'équation de la forme particulière précitée :

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = \frac{x^4 + 1}{x}.$$

Si l'on fait $x = e^t$, le changement de variable indépendante donne (opérer comme dans l'exemple II, chapitre VII, *Exercices méthodiques de calcul différentiel*),

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} - 2y = e^{3t} + e^{-t},$$

équation dont l'intégrale générale est

$$y = C_1 e^{2t} + (C_2 + C_3 t) e^t + \frac{1}{4} e^{3t} - \frac{1}{12} e^{-t}.$$

Remplaçant t par sa valeur en x, on obtient :

$$y = C_1 x^2 + (C_2 + C_3 \log x) x + \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{12x}$$

pour l'intégrale générale de l'équation proposée.

Exemple II.

Soit $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+m^4y=0$ ou $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+m^4xy=0.$

De ce que

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2}=x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx},$$

l'équation peut s'écrire

$$\frac{d^2(xy)}{dx^2}+m^4(xy)=0.$$

D'où, par intégration,

$$xy=C_1\cos m^2x+C_2\sin m^2x,$$

et, par suite,

$$y=\frac{1}{x}(C_1\cos m^2x+C_2\sin m^2x).$$

Exemple III.

Soit $x^4\frac{d^2y}{dx^2}-m^2y=0.$

Si l'on pose

$$x=\frac{1}{t},$$

l'équation devient :

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2}{t}\frac{dy}{dt}-m^2y=0;$$

et si l'on intègre cette transformée par le procédé de l'exemple II, puis que, dans le résultat, on remplace t par $\frac{1}{x}$, on obtient pour intégrale de l'équation proposée :

$$y=x\left(C_1e^{\frac{m}{x}}+C_2e^{-\frac{m}{x}}\right).$$

Exercices.

1. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 4x \dfrac{dy}{dx} + 6y = (\log x)^2 + 1.$

Intégrale générale :

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{1}{6}(\log x)^2 + \frac{5}{18}\log x + \frac{57}{108}.$$

2. $(a + x)^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3(a + x)\dfrac{dy}{dx} + 4y = (a + x)^m.$

Intégrale :

$$y = [C_1 + C_2 \log(a + x)](a + x)^2 + \frac{(a + x)^m}{(m - 2)^2}.$$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{2}{x^2} - m^2\right) y = 0.$

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{d^2\left(\frac{y}{x}\right)}{dx^2} - m^2\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

et donne pour intégrale :

$$\frac{y}{x} = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}.$$

D'où le résultat cherché :

$$y = x\,(C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}).$$

4. $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4x \dfrac{dy}{dx} - (m^6x^2 - 2)\, y = 0.$

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{d^2(x^2y)}{dx^2} - m^6(x^2y) = 0.$$

Intégrale :

$$y = \frac{1}{x^2}\left(C_1 e^{m^3 x} + C_2 e^{-m^3 x}\right).$$

5. $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2.$

Intégrale :

$$y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\log x) + C_3 \sin(\log x) - \frac{x^2}{5}.$$

6. $(1+x)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 9(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 18(1+x)\frac{dy}{dx} + 6y$

$$= \log(1+x).$$

Intégrale :

$$y = \frac{C_1}{1+x} + \frac{C_2}{(1+x)^2} + \frac{C_3}{(1+x)^3} + \frac{\log(1+x)}{6} - \frac{11}{36}.$$

7. $x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0.$

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{d^3(xy)}{dx^3} - xy = 0.$$

Intégrale :

$$y = \frac{1}{x}\left[C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos\frac{x}{2}\sqrt{3} + C_3 \sin\frac{x}{2}\sqrt{3}\right)\right].$$

8. $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$

Intégrale :

$$y = x\left(C_1 \cos\frac{1}{x} + C_2 \sin\frac{1}{x}\right).$$

9. $x^4 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x^3 \frac{dy}{dx} + (2x^2 + m^2) y = 0.$

Poser d'abord

$$x = \frac{1}{t}.$$

Intégrale :

$$y = x^2 \left(C_1 \cos \frac{m}{x} + C_2 \sin \frac{m}{x} \right).$$

10. $x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 2x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - 2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} - 4y = x^m.$

Intégrale :

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + (C_3 + C_4 \log x) x^2 + \frac{x^m}{(m^2 - 1)(m-2)^2}.$$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0.$

Rappelons que toute équation linéaire, de l'ordre n et sans second membre, devient de l'ordre $n - 1$, si l'on y fait $y = e^{\int u dx}$.

Ainsi l'équation proposée devient :

$$\frac{du}{dx} + (u + x)^2 = 0;$$

et si l'on pose de nouveau

$$u + x = z,$$

l'équation transformée est

$$\frac{dz}{dx} + z^2 - 1 = 0.$$

Intégrale :

$$z = \frac{1 + e^{2(C_1 - x)}}{1 - e^{2(C_1 - x)}}.$$

D'où

$$u = \frac{1 + e^{2(C_1 - x)}}{1 - e^{2(C_1 - x)}} - x,$$

et

$$\int u dx = \int \frac{1 + e^{2(C_1 - x)}}{1 - e^{2(C_1 - x)}} dx - \int x dx.$$

Les intégrations du second membre effectuées, on trouve :

$$\int u dx = x + \log\left[1 - e^{2(C_1 - x)}\right] - \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Donc

$$y = e^{x + \log\left[1 - e^{2(C_1 - x)}\right] - \frac{x^2}{2} + C_2}.$$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} - 8x \frac{dy}{dx} + 16x^2 y = 0.$

En procédant comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$y = e^{\log \cos 2(C_1 - x) + 2x^2 + C_2}.$$

CHAPITRE XV.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

Ces sortes d'équations ne sont intégrables que dans des cas très particuliers. Parmi ceux-ci, nous rappellerons seulement ceux qui présentent le plus grand nombre d'applications.

1° Intégration des équations de la forme :

$$f\left(\frac{d^n y}{dx^n}, x\right) = 0.$$

Si l'on résout par rapport à $\frac{d^n y}{dx^n}$, on trouve

$$\frac{d^n y}{dx^n} = X,$$

X représentant une fonction de x.

Ce résultat peut s'écrire :

$$\frac{d . \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}}{dx} = X.$$

D'où

$$d . \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = X dx,$$

et, par intégration,

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int X dx + C_1.$$

Ainsi on abaissera successivement d'une unité l'ordre de la dérivée, jusqu'à ce que l'on obtienne l'expression de y.

Exemple.

Soit l'équation

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)^2 - x^4 = 0.$$

On en tire :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \pm x^2.$$

Et, successivement :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{x^3}{3} + C_1.$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x^4}{3 . 4} + C_1 x + C_2.$$

$$y = \pm \frac{x^5}{3 . 4 . 5} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

2° Intégration des équations de la forme

$$f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

c'est-à-dire ne renfermant que deux dérivées consécutives d'ordre quelconque.

On pose
$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

et l'on a

$$f\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

équation du premier ordre en p et x qui, conjointement avec l'équation (1), donne l'intégrale cherchée.

Exemple.

Trouver la courbe dont le rayon de courbure est une quantité constante a.

La traduction analytique de l'énoncé est

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a.$$

Posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

on obtient

$$\frac{[1 + p^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De l'équation (2), on tire :

$$dx = \frac{a\,dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et, par intégration,

$$x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + C_1, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

d'où facilement

$$p = \frac{x - C_1}{\sqrt{a^2 - (x - C_1)^2}}.$$

Substituant cette valeur de p dans (1), on trouve

$$dy = \frac{(x - C_1)\,dx}{\sqrt{a^2 - (x - C_1)^2}};$$

et, par suite,

$$y = -\sqrt{a^2 - (x - C_1)^2} + C_2,$$

ou

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2,$$

équation d'un cercle de rayon a et dont les coordonnées du centre sont C_1 et C_2.

On aurait obtenu le même résultat en portant l'expression de dx dans l'équation (1), ce qui eût donné

$$dy = a\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et, par conséquent,

$$y = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C^2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

On n'aurait plus eu qu'à éliminer p entre les équations (3) et (4).

3° Intégration des équations du second ordre, de la forme

$$f\left(x,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

On pose

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

ce qui donne

$$f\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

équation du premier ordre en p et x qui, conjointement avec l'équation (1), fournit l'intégrale cherchée.

Exemple.

Soit l'équation

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$$

En posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

on trouve :

$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} + p^2 + 1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ou bien,

$$\frac{dp}{1 + p^2} + \frac{dx}{1 + x^2} = 0;$$

et, par intégration,

$$\frac{p + x}{1 - px} = C_1, \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}.$$

Substituant cette valeur de p dans l'équation (1), on trouve :

$$dy = \frac{C_1 - x}{1 + C_1 x}\,dx,$$

et, en intégrant,

$$C_1^2 y = (1 + C_1^2)\log(1 + C_1 x) - C_1 x + C_2.$$

4° Intégration des équations du second ordre de la forme

$$f\left(y,\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

De telle équation, on tire :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{Y},$$

Y représentant une fonction de y.

Multipliant les deux membres par $2dy$, il vient :

$$d \,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\mathrm{Y}dy;$$

et, par intégration,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int \mathrm{Y}dy + \mathrm{C}_1.$$

D'où

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int \mathrm{Y}dy + \mathrm{C}_1}};$$

et, en intégrant de nouveau,

$$x = \mathrm{C}^2 + \int \frac{dy}{\sqrt{2\int \mathrm{Y}dy + \mathrm{C}_1}}.$$

Exemple.

Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4\sqrt{y}}.$$

La multiplication des deux membres par $2dy$ donne

$$d \,.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

et, en intégrant,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \sqrt{y} + \mathrm{C}_1;$$

d'où

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{y^{\frac{1}{2}} + \mathrm{C}_1}}.$$

ou, en faisant $y = z^2$,

$$dx = \frac{2zdz}{\sqrt{z + C_1}};$$

et, par nouvelle intégration,

$$x = \frac{4}{3}(z - 2C_1)\sqrt{z + C_1} + C_2.$$

Remplaçant z par $y^{\frac{1}{2}}$, on obtient, pour intégrale cherchée,

$$x = \frac{4}{3}(y^{\frac{1}{2}} - 2C_1)\sqrt{y^{\frac{1}{2}} + C_1} + C_2.$$

5° Intégration des équations du second ordre, de la forme

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0.$$

On pose

$$\frac{dy}{dx} = p. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

D'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La substitution fournit

$$f\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

équation entre p et y qui, conjointement avec l'équation (1), donne l'intégrale cherchée.

Exemple.

Trouver la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale.

L'équation différentielle de la courbe est

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = my\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ou, en simplifiant,

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = my\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Après avoir remplacé $\frac{dy}{dx}$ par p et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $p\frac{dp}{dy}$, on trouve :

$$\frac{pdp}{1+p^2} = \frac{1}{m}\frac{dy}{y},$$

et, par intégration,

$$\log(1+p^2) = \frac{2}{m}\log y - \frac{2}{m}\log C_1.$$

D'où

$$1+p^2 = \left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{m}}$$

et

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{m}} - 1}.$$

Par suite, l'équation $\frac{dy}{dx} = p$ donne :

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

équation différentielle dont l'intégration est possible dans les cas suivants :

1° Si $m = 1$,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}},$$

et, après intégration,

$$x = C_2 + C_1 \log\left[\frac{y}{C_1} + \sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}\right].$$

D'où

$$C_1 e^{\frac{x-C_2}{C_1}} = y + \sqrt{y^2 - C_1^2},$$

et, par suite,

$$y = \frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x-C_2}{C_1}}\right),$$

équation d'une chaînette.

2° Si $m = 2$,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\frac{y}{C_1} - 1}}$$

et $$x = 2\sqrt{C_1}\sqrt{y - C_1} + C_2,$$

ou $$(x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1),$$

équation d'une parabole.

3° Si $m = -1$,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{-2} - 1}} = \frac{ydy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}},$$

et $$x = -\sqrt{C_1^2 - y^2} + C_2,$$

ou $$y^2 + (x - C_2)^2 = C_1^2,$$

équation d'un cercle.

4° Si $m = -2$,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{-1} - 1}} = \frac{ydy}{\sqrt{C_1 y - y^2}},$$

équation différentielle d'une cycloïde dont le cercle générateur est de rayon $\frac{C_1}{2}$.

6° Intégration des équations du second ordre, homogènes en y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$.

On abaisse d'une unité l'ordre d'une telle équation :

Soit en posant,

$$y = e^{\int u dx},$$

(u étant une nouvelle variable dépendante),

d'où

$$\frac{dy}{dx} = ue^{\int u dx},$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{du}{dx} + u^2\right) e^{\int u dx};$$

soit, en faisant,

$$\frac{dy}{dx} = uy \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = vy,$$

(u et v étant de nouvelles variables),

d'où

$$\frac{du}{dx} = v - u^2.$$

Exemple.

Soit l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y\frac{dy}{dx}}{1+x}.$$

1° Si l'on remplace y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $e^{\int u dx}$, etc., l'équation devient :

$$\left(\frac{du}{dx} + u^2\right) e^{2\int u dx} - u^2 e^{2\int u dx} = \frac{ue^{2\int u dx}}{1+x};$$

et, après simplification,

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+x},$$

d'où

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{1+x}.$$

Intégrant, on trouve :

$$\log u = \log(1+x) + \log C_1$$

ou

$$u = C_1(1+x).$$

De là résulte :

$$udx = C_1(1+x)\,dx,$$

$$\int udx = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$y = e^{C_1\left(x+\frac{x^2}{2}\right)+C_2}.$$

2° Si l'on pose, par le second procédé,

$$\frac{dy}{dx} = uy \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = vy,$$

l'équation devient :

$$vy^2 - u^2y^2 = \frac{uy^2}{1+x},$$

et, en simplifiant,

$$v - u^2 = \frac{u}{1+x}.$$

Or,

$$v - u^2 = \frac{du}{dx}.$$

Donc

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{1+x}.$$

D'où

$$u = C_1(1+x).$$

La substitution de cette expression de u dans l'équation $\frac{dy}{dx} = uy$ donne :

$$\frac{dy}{y} = C_1(1 + x)dx,$$

et, par intégration, le même résultat que par le premier procédé.

7° Intégration des équations du second ordre, homogènes en x, y, dx, dy et d^2y.

On démontre dans les cours que si l'on pose :

$$y = ux, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$dy = pdx, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

et

$$d^2y = \frac{q}{x} dx^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

x et dx disparaissent de telle équation, laquelle prend la forme :

$$F(u, p, q) = 0;$$

d'où

$$q = f(u, p).$$

D'autre part, les équations (1) et (2) fournissent :

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p - u}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

et les équations (2) et (3) :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{q}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

D'où

$$\frac{du}{p - u} = \frac{dp}{f(u, p)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

équation du premier ordre entre p et u qui, conjointement avec les équations (1), (2) et (4), fournit l'intégrale cherchée.

Exemple I.

Soit l'équation

$$x^2\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=y^2.$$

Multipliant les deux membres par dx^2, on a :

$$x^2(yd^2y+dy^2)=y^2dx^2.$$

L'équation proposée est donc homogène et du quatrième degré en x, y, dx, dy et d^2y.

Cela étant, en vertu des équations (1), (2) et (3), l'équation en question devient :

$$uq+p^2=u^2,$$

d'où

$$q=\frac{u^2-p^2}{u}.$$

La substitution de cette expression de q dans l'équation (6) donne

$$\frac{du}{p-u}=\frac{udp}{u^2-p^2};$$

ou, après simplification,

$$udu+pdu+udp=0;$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{u^2}{2}+pu=\frac{C_1}{2}.$$

De là résulte

$$p=\frac{C_1-u^2}{2u}.$$

Substituant cette expression de p dans l'équation (4), on obtient :

$$\frac{dx}{x}=\frac{2udu}{C_1-3u^2},$$

et, par intégration,

$$\log x = -\frac{1}{3}\log(C_1 - 3u^2) + \log C_2,$$

ou

$$\frac{x}{C_2} = \frac{1}{(C_1 - 3u^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

D'où

$$C_1 - 3u^2 = \frac{C_2^3}{x^3}.$$

Remplaçant u par $\frac{y}{x}$, on trouve pour l'intégrale cherchée :

$$y^2 = \frac{C_1x^3 - C_2^3}{3x}.$$

Exemple II.

Soit l'équation

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = my\frac{d^2y}{dx^2},$$

expression analytique du problème traité au 5° de ce chapitre.

La multiplication des deux membres par dx^2 donne

$$dx^2 + dy^2 = myd^2y$$

et l'emploi des équations (1), (2) et (3),

$$1 + p^2 = muq.$$

D'où

$$q = \frac{1 + p^2}{mu}.$$

Substituant cette expression de q dans l'équation (6), il vient :

$$\frac{du}{p - u} = m\frac{udp}{1 + p^2}.$$

Ici, faisons usage d'une transformation remarquable, abrégeant de beaucoup le calcul, quand, après la substitu-

tion de q dans l'équation (6), le second membre de celle-ci est de la forme $\frac{udp}{f(p)}$.

Remplaçant $\frac{du}{p-u}$ par $\frac{dx}{x}$, équation (4), puis multipliant les deux membres par $\frac{p}{u}$, il vient :

$$\frac{pdx}{ux} = m\frac{pdp}{1+p^2},$$

ou, en vertu des équations (1) et (2),

$$\frac{dy}{y} = m\frac{pdp}{1+p^2}.$$

L'intégration donne

$$\log y = \frac{m}{2}\log(1+p^2) + \log C_1$$

ou

$$\frac{y}{C_1} = (1+p^2)^{\frac{m}{2}}.$$

D'où

$$\left(\frac{y}{C^1}\right)^{\frac{2}{m}} = 1+p^2$$

et

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{m}} - 1},$$

ou bien

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{m}} - 1}.$$

De là

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

équation différentielle trouvée au 5° par une autre méthode.

Exercices.

1. $\frac{d^4y}{dx^4} = e^{ax}$.

$$y = \frac{1}{a^4}e^{ax} + C_1\frac{x^3}{1.2.3} + C_2\frac{x^2}{1.2} + C_3\frac{x}{1} + C_4.$$

2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 = (1+x)^n$.

$$y = \pm 2^3\frac{(1+x)^{\frac{n+6}{2}}}{(n+2)(n+4)(n+6)} + C_1\frac{x^2}{1.2} + C_2\frac{x}{1} + C_3.$$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$.

$$y = \sin(x - C_1) + C_2.$$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2}$.

$$y = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax - C_1}{2}\right) + C_2.$$

5. $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{2x}\frac{d^2y}{dx^2}$.

On trouve :

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2xdx}{a^2},$$

puis, par intégration dans laquelle on prend $\frac{b}{a}$ pour constante arbitraire,

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{x^2 + ab}{a^2}.$$

D'où,

$$p = \frac{x^2 + ab}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}},$$

et, par suite,

$$y = \int \frac{(x^2 + ab)\,dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 + ab)^2}}.$$

C'est l'équation de la *courbe élastique*.

6. $(x + a)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{dy}{dx}.$

On obtient d'abord :

$$dp - \frac{pdx}{x + a} = -\frac{p^2xdx}{x + a},$$

équation dont l'intégrale, dans laquelle $\dfrac{C_1^2}{2}$ désigne la constante arbitraire, fournit :

$$p = \frac{2(x + a)}{x^2 - C_1^2}.$$

D'où

$$y - C_2 = \log(x^2 - C_1^2) + \frac{a}{C_1}\log\left(\frac{x - C_1}{x + C_1}\right).$$

7. $y^3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0.$

$$x = \frac{1}{C_1}\sqrt{C_1y^2 + 1} + C_2.$$

8. $y\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1.$

$$x = \sqrt{y^2 - C_1^2} + C_2.$$

9. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{d^2y}{dx^2} = n\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

On trouve d'abord :

$$p - y\frac{dp}{dy} = n\left[1 + a^2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

équation forme Clairaut dont l'intégrale est

$$p = C_1 y + n\sqrt{1 + a^2C_1^2}.$$

D'où

$$dx = \frac{dy}{C_1 y + n\sqrt{1 + a^2C_1^2}}$$

et

$$x = \frac{1}{C_1}\log\left(C_1 y + n\sqrt{1 + a^2C_1^2}\right) + C_2.$$

Si l'on élimine C_1 entre l'équation

$$p = C_1 y + n\sqrt{1 + a^2C_1^2}$$

et sa dérivée par rapport à C_1, on obtient pour solution singulière :

$$p = \frac{\sqrt{n^2a^2 - y^2}}{a},$$

d'où, en vertu de l'équation $\frac{dy}{dx} = p$,

$$y = na\sin\frac{x + C}{a}.$$

10. $x^2y\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

$$y = e^{\frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\log(1 + C_1x) + C_2}.$$

11. $xy\dfrac{d^2y}{dx^2}=y\dfrac{dy}{dx}+x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\dfrac{nx\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

Si l'on pose $\dfrac{dy}{dx}=uy$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}=vy$, on trouve pour transformée :

$$du-u\frac{dx}{x}=\frac{nu^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

et, en intégrant,

$$u=\frac{x}{n\sqrt{a^2-x^2}+C_1}.$$

D'où, en vertu de l'équation $\dfrac{dy}{dx}=uy$,

$$\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{n\sqrt{a^2-x^2}+C_1},$$

et, en intégrant de nouveau,

$$n\sqrt{a^2-x^2}=C_1\log\left(n\sqrt{a^2-x^2}+C_1\right)-n^2\log C_2y.$$

12. $y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}+a\right),$

équation homogène en dx, y, dy et d^2y.

On obtient d'abord

$$q=\frac{p(p+a)}{u}.$$

D'où, en vertu de l'équation (6),

$$\frac{du}{p-u}=\frac{udp}{p(p+a)}.$$

Transformant comme dans l'exemple II, cas 7°, on trouve :

$$p=\frac{y-aC_1}{C_1},$$

puis, à cause de $\frac{dy}{dx} = p$,

$$x - C_2 = C_1 \log (y - uC_1).$$

13. $x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y - x \frac{dy}{dx}\right)^2$,

équation homogène en x, y, dx, dy et d^2y.

On obtient en premier lieu :

$$q = (u - p)^2,$$

et, par substitution dans l'équation (6),

$$dp - pdu = - udu,$$

équation linéaire dont l'intégrale est

$$p = u + 1 + C_1 e^u.$$

Substituant cette expression de p dans l'équation (4), on trouve :

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{1 + C_1 e^u} = \frac{e^{-u} du}{e^{-u} + C_1},$$

et, par intégration,

$$\frac{C_2}{x} = e^{-u} + C_1;$$

d'où

$$e^u = \frac{x}{C_2 - C_1 x},$$

ou

$$u = \log \frac{x}{C^2 - C_1 x},$$

ou encore

$$y = x \log \frac{x}{C_2 - C_1 x}.$$

C'est l'intégrale demandée.

14. $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\frac{s}{a}$.

On tire de cette équation,

$$s = a \,.\, \text{arc tang}\,\frac{dy}{dx},$$

et, en dérivant,

$$\frac{ds}{dx} = a \,.\, \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Si l'on remplace $\frac{ds}{dx}$ par $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, il vient

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ou

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = a \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Cette équation a été intégrée dans l'exemple du cas 2°.

15. $2(s + 1) = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

Si l'on opère comme dans l'exercice précédent, on trouve :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} \qquad \text{(Cas 2°)},$$

équation dont l'intégrale est

$$y = \frac{x - C_1}{2}\sqrt{(x - C_1)^2 - 1} - \frac{1}{2}\log\left[(x - C_1) + \sqrt{(x - C_1)^2 - 1}\right] + C_2.$$

16. La projection du rayon de courbure d'une courbe sur une droite donnée est de longueur constante a. Quelle est cette courbe?

Prenons la droite pour axe des x et une perpendiculaire à cette droite comme axe des y.

Si l'on représente par α l'abscisse du centre de courbure d'une courbe, la projection du rayon de courbure sur l'axe des x est

$$x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée est donc

$$\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} = a \qquad \text{(Cas 2°).}$$

On obtient d'abord :

$$dx = \frac{adp}{p(1+p^2)},$$

et, par intégration,

$$\frac{x - C_1}{a} = \log \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Par substitution de l'expression de dx dans l'équation $\frac{dy}{dx} = p$, on a :

$$dy = \frac{adp}{1+p^2},$$

et, en intégrant,

$$\frac{y - C_2}{a} = \text{arc tang}\, p. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

L'élimination de p entre les équations (1) et (2) donne pour la courbe cherchée :

$$\frac{x - C_1}{a} = \log \sin \frac{y - C_2}{a}.$$

17. Une courbe, passant par l'origine des axes rectangulaires auxquels elle est rapportée, est telle que si, par un quelconque de ses points, M, on mène l'ordonnée MP et la tangente dont la longueur est MT, l'aire du triangle MTP est proportionnelle à l'aire OMP comprise entre la courbe, l'ordonnée MP et l'axe des abscisses. Quelle est cette courbe?

La traduction analytique de l'énoncé est

$$\frac{y^2}{\frac{dy}{dx}} = 2a \int y dx$$

Si l'on dérive cette équation, on trouve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 - 2a}{y} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \qquad \text{(Cas 5°)},$$

et, par intégration,

$$x = \frac{y^{2a-1}}{C_1(2a - 1)} + C_2,$$

équation d'une parabole d'un ordre supérieur.

18. Chercher une courbe telle que l'arc, compté à partir d'un point donné, soit proportionnel à la sous-tangente augmentée de l'abscisse.

L'énoncé fournit l'équation

$$x - \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = as.$$

Si l'on dérive et que dans le résultat on remplace $\frac{ds}{dx}$ par $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, on trouve :

$$y\frac{d^2y}{dx^2}=a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \text{(Cas 5°)},$$

équation différentielle dont l'intégrale est

$$2C_1x=C_2-\frac{C_1^2}{(a-1)\,y^{a-1}}-\frac{y^{a+1}}{a+1}.$$

CHAPITRE XVI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

L'intégration de tels systèmes d'équations qui renferment 3, 4, etc., variables, dont une seule indépendante, peut s'effectuer par deux méthodes : l'une où l'on emploie la dérivation pour éliminer les variables dépendantes, une exceptée ; l'autre qui procède par indétermination (méthode de d'Alembert). De ces deux méthodes, nous ne rappellerons ni n'appliquerons que la première, qui conduit aisément, pour déterminer la variable dépendante non éliminée, à l'intégration d'une équation linéaire à coefficients constants ; intégration dont nous avons présenté les différents cas, chapitre XIII.

Soient les deux équations linéaires simultanées de premier ordre

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=F(x,y,z), & \ldots\ldots (1) \\ \dfrac{dz}{dx}=f(x,y,z). & \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Si l'on dérive la première et que, dans le résultat, on remplace $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ par les seconds membres des équations proposées, on trouve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, y, z); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et si l'on élimine z entre les équations (1) et (3), on obtient une équation linéaire de second ordre qui, intégrée, donne y en fonction de x, avec deux constantes arbitraires.

Quant à l'expression de z, en x, avec les mêmes constantes arbitraires, elle est donnée par l'équation (1), dans laquelle on remplace d'abord y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs respectives.

Soient les trois équations linéaires simultanées de premier ordre :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{dy}{dx} = F(x, y, z, t), & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \\ \frac{dz}{dx} = f(x, y, z, t), & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \\ \frac{dt}{dx} = \varphi(x, y, z, t). & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \end{array}\right.$$

Si l'on dérive deux fois la première et que, dans le résultat de chaque dérivation, on remplace $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dt}{dx}$ par les seconds membres des équations données, on obtient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F_1(x, y, z, t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

et

$$\frac{d^3y}{dx^3} = F_2(x, y, z, t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

L'élimination de z et de t entre les équations (1), (4) et (5) fournit une équation de troisième ordre qui, intégrée, donne y en fonction de x, avec trois constantes arbitraires.

L'élimination de t entre les équations (1) et (4) donne une équation de laquelle, après avoir remplacé y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs, on tire l'expression de z.

Puis l'expression de t s'obtient au moyen de l'équation (1), dans laquelle on substitue d'abord à y, à z et à $\frac{dy}{dx}$, leurs valeurs respectives.

Même marche d'intégration pour des systèmes de 4, 5, etc., équations linéaires de premier ordre.

Si les équations simultanées sont d'un ordre supérieur, on les transforme de manière que l'intégration soit ramenée à celle d'équations du premier ordre.

Soient, par exemple, les deux équations linéaires simultanées de second ordre :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right), \\ \frac{d^2z}{dx^2} &= f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right). \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose : $\frac{dy}{dx} = y'$ et $\frac{dz}{dx} = z'$, on est ramené à l'intégration du système des quatre équations de premier ordre :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y', \\ \frac{dz}{dx} &= z', \\ \frac{dy'}{dx} &= F(x, y, z, y', z'), \\ \frac{dz'}{dx} &= f(x, y, z, y', z'). \end{aligned}\right.$$

Tels sont les procédés que l'on pourrait toujours suivre rigoureusement pour intégrer, quand l'intégration est

possible, des équations linéaires simultanées à coefficients constants.

Mais, sans donner aux équations les formes explicites sous lesquelles nous les avons présentées, l'examen de tel système particulier d'équations suggère souvent des moyens d'arriver au but plus simplement, tout en restant dans l'esprit de la méthode.

Exemple I.

Soient les équations

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 11y - 16z = 1 + x, & \ldots \quad (1) \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} + 2y + z = 1 - x. & \ldots \quad (2) \end{cases}$$

Dérivant la première et substituant, dans le résultat, la valeur de $\dfrac{dz}{dx}$ donnée par la seconde, on trouve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} + 32y + 16z = 17 - 16x. \quad . \quad . \quad (3)$$

et en additionnant membre à membre les équations (1) et (3), afin d'éliminer z,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 21y = 18 - 15x,$$

équation linéaire de second ordre, à coefficients constants, dont l'intégrale générale est

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{7x} - \frac{5}{7}x + \frac{76}{147};$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = 3C_1e^{3x} + 7C_2e^{7x} - \frac{5}{7}.$$

La substitution de ces expressions de y et de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (1) donne ensuite :

$$z = -\frac{1}{2}C_1e^{3x} - \frac{1}{4}C_2e^{7x} + \frac{3}{7}x - \frac{68}{147}.$$

Exemple II.

Soient les équations

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{dy}{dx} + bz + ct = 0, \ldots\ldots & (1) \\ \frac{dz}{dx} + a'y + c't = 0, \ldots\ldots & (2) \\ \frac{dt}{dx} + a''y + b''z = 0 \ldots\ldots & (3) \end{array}\right.$$

Dérivant deux fois la première et, dans le résultat de chaque dérivation, remplaçant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dt}{dx}$ par leurs valeurs fournies par les équations (2) et (3), on obtient :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (ba' + ca'')\,y - cb''z - bc't = 0, \quad . \; . \quad (4)$$

et

$$\frac{d^3y}{dx^3} - (ba' + ca'')\frac{dy}{dx} + (ca'b'' + bc'a'')\,y + bc'b''z + cc'b''t = 0. \quad (5)$$

Éliminant z et t entre les équations (1) et (5), on trouve :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - (ba' + ca'' + c'b'')\frac{dy}{dx} + (ca'b'' + bc'a'')\,y = 0,$$

équation linéaire dont l'intégrale générale est

$$y = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\gamma x},$$

quand on représente par α, β et γ les racines de l'équation auxiliaire

$$r^3 - (ba' + ca'' + c'b'')\, r + (ca'b'' + bc'a'') = 0.$$

L'expression de y donne :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha C_1 e^{\alpha x} + \beta C_2 e^{\beta x} + \gamma C_3 e^{\gamma x},$$

et

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 C_1 e^{\alpha x} + \beta^2 C_2 e^{\beta x} + \gamma^2 C_3 e^{\gamma x},$$

puis, en éliminant tour à tour t et z entre les équations (1) et (4), et, dans chaque équation résultante, remplaçant y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ par leurs valeurs, on trouve les expressions de z et de t.

Exemple III.

Soient les équations

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, & \quad \ldots\ldots \quad (1) \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x & \quad \ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

De la première, on tire immédiatement :

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{d^2z}{dx^2} = e^x;$$

d'où, en remplaçant $\frac{d^2z}{dx^2}$ par sa valeur fournie par l'équation (2) :

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4y + 12z = 4x + e^x.$$

Éliminant z entre cette équation et l'équation (1), on trouve :

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x - 2e^x,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^x - 2x;$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C_1e^{x\sqrt{2}} + 2C_2e^{-x\sqrt{2}} - C_3 \cos x - C_4 \sin x + e^x.$$

Substituant ces expressions de y et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation (1), on en tire :

$$z = - C_1e^{x\sqrt{2}} - C_2e^{-x\sqrt{2}} - \frac{1}{4} C_3 \cos x - \frac{1}{4} C_4 \sin x - \frac{1}{2} e^x + x.$$

Exercices.

1. $$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + a^2z = 0,\\ &\frac{dz}{dx} + b^2y = 0.\end{aligned}\right.$$

$$y = C_1e^{abx} + C_2e^{-abx},$$

$$z = -\frac{b}{a}(C_1e^{abx} - C_2e^{-abx}).$$

2. $$\left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} - 3y - 8z = 0,\\ &\frac{dz}{dx} + y + 3z = 0.\end{aligned}\right.$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x},$$

$$z = -\frac{1}{4}(C_1e^x + 2C_2e^{-x}).$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y - 5z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$z = e^{-x}\left(\frac{C_2 - 2C_1}{5} \cos x - \frac{C_1 + 2C_2}{5} \sin x\right).$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 17y - 40z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + 5y + 6z = x. \end{cases}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{9x} + \frac{20}{9} x + \frac{110}{81},$$

$$z = -\left(\frac{3}{8} C_1 e^{2x} + \frac{1}{5} C_2 e^{9x} + \frac{17}{18} x + \frac{169}{324}\right).$$

5. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - y - z = x, \\ \dfrac{dz}{dx} + 4y + 3z = 2x. \end{cases}$$

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + 5x - 9,$$

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)\, e^{-x} - 6x + 14.$$

6. $$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 5y + z = 1 + x^2, \\ \dfrac{dz}{dx} - y + 3z = e^{2x}. \end{cases}$$

$$y = \frac{25}{128} - \frac{x}{16} + \frac{3x^2}{16} - \frac{1}{56} e^{2x} + (C_1 + C_2 x)\, e^{-4x},$$

$$z = \frac{11}{128} - \frac{x}{16} + \frac{x^2}{16} + \frac{7}{56} e^{2x} - C_2 e^{-4x} - (C_1 + C_2 x)\, e^{-4x}.$$

$$7. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx} - 3z + 4t = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots & (1) \\ \dfrac{dz}{dx} + t = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots & (2) \\ \dfrac{dt}{dx} + 2y - z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots & (3) \end{array} \right.$$

La dérivation donne les trois équations :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2z}{dx^2} + 4\frac{d^2t}{d^2x} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0;$$

et si, dans la première, on substitue les valeurs de $\frac{d^2z}{dx^2}$ et de $\frac{d^2t}{dx^2}$ tirées des deux autres, on obtient :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} + 3\frac{dt}{dx} = 0.$$

Remplaçant, dans cette dernière équation, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dt}{dx}$ par leurs valeurs données par les équations (2) et (3), il vient :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8\frac{dy}{dx} - 6y + 3z - 4t = 0.$$

Enfin, entre l'équation précédente et l'équation (1) éliminant z et t, on trouve :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} - 6y = 0;$$

équation dont l'intégrale est

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x}.$$

Cette expression de y fera aisément trouver :

$$z = C_1e^{-x} + \frac{2}{5}C_2e^{-2x} + \frac{1}{5}C_3e^{3x},$$

$$t = C_1e^{-x} + \frac{4}{5}C_2e^{-2x} - \frac{3}{5}C_3e^{3x}.$$

$$8.\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 32y + 38z + 47t = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} - 10y + 13z + 14t = 0, \\ \dfrac{dt}{dx} - 14y + 16z + 21t = 0. \end{cases}$$

Si l'on applique rigoureusement la règle rappelée plus haut, on obtient :

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x},$$

$$z = \frac{2}{7}C_1e^{x} + \frac{1}{4}C_2e^{-x} + \frac{2}{5}C_3e^{-2x},$$

$$t = \frac{3}{7}C_1e^{x} + \frac{1}{2}C_2e^{-x} + \frac{2}{5}C_3e^{-2x}.$$

$$9.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 7y - z = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} + 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

Si l'on opère comme dans l'exemple III, on trouve :

$$y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x + C_3\cos\sqrt{6}x + C_4\sin\sqrt{6}x,$$

$$z = 4C_1\cos\sqrt{3}x + 4C_2\sin\sqrt{3}x + C_3\cos\sqrt{6}x + C_4\sin\sqrt{6}x.$$

$$10.\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 2\dfrac{dz}{dx} + y = \cos 2x, \quad \dots\dots \quad (1) \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} + 2\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{dy}{dx} + 6z + 5y = \sin x. \quad \dots\dots \quad (2) \end{cases}$$

L'élimination de z fournit :

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 6y = 2\cos x + 2\cos 2x - 4\sin 2x.$$

D'où

$$y = \cos 2x - 2\sin 2x + \cos x + C_1\cos\left(\sqrt{2}x + \alpha\right) + C_2\cos\left(\sqrt{3}x + \beta\right).$$

Substituant les valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'équation (1), on tire de celle-ci l'expression de $\frac{dz}{dx}$ et, par suite, celle de $\frac{d^2z}{dx^2}$. Puis une nouvelle substitution des valeurs de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{d^2z}{dx^2}$ dans l'équation (2), donne

$$z = \sin 2x - \frac{5}{2}\cos 2x - \cos x - C_1\cos\left(\sqrt{2}x + \alpha\right) - \frac{1}{4}\sqrt{2}C_1\sin\left(\sqrt{2}x + \alpha\right) - C_2\cos\left(\sqrt{3}x + \beta\right) - \frac{1}{3}\sqrt{3}C_2\sin\left(\sqrt{3}x + \beta\right).$$

CHAPITRE XVII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DÉRIVÉES PARTIELLES.

SECTION I. — *Équations linéaires, du premier ordre.*

Soit z une fonction des variables indépendantes x et y. La forme de l'équation aux dérivées partielles sera

$$Pp + Qq = R, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

p et q représentant respectivement $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, et P, Q, R étant, en général, des fonctions de x, y, z.

Pour obtenir l'intégrale générale de cette équation, la théorie enseigne qu'il faut d'abord intégrer les équations simultanées, si faciles à former,

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et que si les intégrales de ces équations sont

$$U = \alpha \quad \text{et} \quad V = \beta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

U et V représentant des fonctions de x, y, z et α, β des constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$V = \varphi(U), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

φ (U) représentant une fonction arbitraire de U.

On peut déterminer la fonction φ en astreignant la surface que l'équation (4) représente, à passer par une ligne dont les équations sont

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0, \\ F_1(x, y, z) = 0. \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

En éliminant alors x, y et z entre les quatre équations (3) et (5), on parvient à une équation entre α et β, puis, remplaçant dans cette équation α par U et β par V, on obtient l'intégrale particulière cherchée.

De même, soit u une fonction des variables indépendantes x, y et z. La forme de l'équation aux dérivées partielles sera

$$Pp + Qq + Rr = S, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

p, q et r représentant respectivement $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ et $\frac{du}{dz}$ et P, Q, R, S étant, en général, des fonctions de x, y, z, u.

Pour obtenir l'intégrale générale de cette équation, il faut d'abord intégrer les équations simultanées,

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{S},$$

et si les intégrales de ces équations sont

$$U=\alpha, \qquad V=\beta, \qquad W=\gamma,$$

U, V et W représentant des fonctions de x, y, z, u et α, β, γ des constantes arbitraires, l'intégrale générale de l'équation (6) est

$$W=\varphi(V, U),$$

φ (V, U) représentant une fonction arbitraire de V et de U.

Exemple I.

Soit l'équation

$$ap+bq=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Les équations simultanées à intégrer seront :

$$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=\frac{dz}{1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ou

$$\frac{dx}{a}=\frac{dz}{1} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{b}=\frac{dz}{1},$$

dont les intégrales sont

$$x-az=\alpha \quad \text{et} \quad y-bz=\beta. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$y-bz=\varphi(x-az). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

C'est l'équation des surfaces cylindriques.

Pour déterminer φ, ou trouver une intégrale particulière, assujettissons la surface à passer par l'ellipse dont les équations sont

$$z=0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Entre les équations (3) et (5), éliminons x, y et z. Nous trouverons :

$$\frac{\alpha^2}{A^2}+\frac{\beta^2}{B^2}=1\,;$$

et, en remplaçant α par $x-az$ et β par $y-bz$,

$$\frac{(x-az)^2}{A^2}+\frac{(y-bz)^2}{B^2}=1,$$

équation d'un cylindre elliptique.

Exemple II.

Soit l'équation

$$y^2\frac{dz}{dx}+xy\frac{dz}{dy}=axz.$$

D'où les équations simultanées :

$$\frac{dx}{y^2}=\frac{dy}{xy}=\frac{dz}{axz},$$

ou bien

$$\frac{dy}{xy}=\frac{dx}{y^2},\quad \frac{dz}{axz}=\frac{dy}{xy};$$

ou encore

$$ydy=xdx,\quad \frac{dz}{z}=a\frac{dy}{y},$$

dont les intégrales sont

$$\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+\frac{\alpha}{2}\quad \text{et}\quad \log z=a\log y+\log\beta,$$

ou

$$y^2-x^2=\alpha\quad \text{et}\quad z=\beta y^a,\quad \text{d'où}\quad \frac{z}{y^a}=\beta.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$\frac{z}{y^a}=\varphi(y^2-x^2).$$

Exemple III.

Soit l'équation

$$a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz} = xyz.$$

Les équations simultanées seront

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c} = \frac{du}{xyz},$$

ou bien

$$\frac{dy}{b} = \frac{dx}{a}, \quad \frac{dz}{c} = \frac{dx}{a}, \quad \frac{du}{xyz} = \frac{dx}{a}.$$

Les intégrales des deux premières de ces équations sont :

$$ay - bx = \alpha \quad \text{et} \quad az - cx = \beta,$$

d'où

$$y = \frac{\alpha + bx}{a} \quad \text{et} \quad z = \frac{\beta + cx}{a}.$$

Substituant ces valeurs de y et de z dans la troisième, il vient :

$$a^3du = x(\alpha + bx)(\beta + cx)dx,$$

et, après développement du second membre et intégration :

$$a^3u = \alpha\beta\frac{x^2}{2} + (b\beta + c\alpha)\frac{x^3}{3} + bc\frac{x^4}{4} + \gamma.$$

Si l'on remplace, dans cette équation, α et β par leurs valeurs, on trouve :

$$a^3u = a^2yz\frac{x^2}{2} - a(bz + cy)\frac{x^3}{6} + bc\frac{x^4}{12} + \gamma.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$a^3u - a^2yz\frac{x^2}{2} + a(bz + cy)\frac{x^3}{6} - bc\frac{x^4}{12} = \varphi(az - cx, ay - bx).$$

Exercices.

1. $py - qx = 0$ est l'équation différentielle des surfaces de révolution. Génératrice : circonférence de rayon variable, dont le centre glisse sur l'axe des z d'un système de coordonnées orthogonales, et dont le plan reste parallèle au plan des xy.

Cela posé, chercher l'intégrale générale de l'équation, puis des intégrales particulières en prenant tour à tour pour directrice :

1° Le cercle dont les équations sont $x = 0$ et $y^2 + z^2 = R^2$;

2° L'ellipse id. id. $x = 0$ et $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

3° L'hyperbole id. id. $x = 0$ et $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

4° La parabole id. id. $x = 0$ et $y^2 = 2pz$.

Les équations simultanées sont :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}.$$

Leurs intégrales :

$$x^2 + y^2 = \alpha \quad \text{et} \quad z = \beta.$$

L'intégrale générale de l'équation $py - qx = 0$ est donc

$$z = \varphi(x^2 + y^2).$$

Les intégrales particulières que l'on trouvera en opérant comme dans l'exemple I, sont :

1° $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, équation d'une sphère;

2° $\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z}{c^2} = 1$, id. d'un ellipsoïde de révolution;

3° $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, équation d'un hyperboloïde de révolution;

4° $x^2+y^2=2pz$, id. d'un paraboloïde de révolution.

2. $px+qy=0$ est l'équation différentielle des conoïdes. Génératrice : droite qui se meut sur l'axe des z d'un système de coordonnées orthogonales en restant parallèle au plan des xy.

Chercher l'intégrale générale de l'équation, puis des intégrales particulières en prenant tour à tour pour directrice :

1° Le cercle dont les équations sont $x=a$ et $y^2+z^2=R^2$;

2° L'ellipse id. id. $x=a$ et $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

3° L'hyperbole id. id. $x=a$ et $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$;

4° La parabole id. id. $x=a$ et $y^2=2pz$.

L'intégrale générale cherchée est

$$z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et les intégrales particulières :

1° $$x^2z^2+a^2y^2-R^2x^2=0;$$

2° $$\frac{x^2z^2}{c^2}+\frac{a^2y^2}{b^2}-x^2=0;$$

3° $$\frac{x^2z^2}{c^2}-\frac{a^2y^2}{b^2}+x^2=0;$$

4° $$\frac{x^2z}{a^2}-\frac{y^2}{2p}=0.$$

3. $px + qy = z$ est l'équation différentielle des surfaces coniques. Génératrice : droite tournant autour de l'origine d'un système de coordonnées orthogonales.

Chercher l'intégrale générale de l'équation, puis une intégrale particulière en assujettissant la surface à être tangente à la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

De l'équation $px + qy = z$, on tire,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

équations simultanées dont les intégrales sont :

$$\frac{x}{z} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{y}{z} = \beta.$$

L'intégrale générale cherchée est donc

$$\frac{y}{z} = \varphi\left(\frac{x}{z}\right).$$

Pour trouver l'intégrale particulière, il faut d'abord chercher la courbe de contact de la surface conique et de la sphère à laquelle elle doit être tangente. Or, pour tous les points de cette courbe, les plans tangents aux deux surfaces coïncident et, par conséquent, p et q sont les mêmes.

De l'équation de la sphère, on tire :

$$p = -\frac{x}{z - c} \quad \text{et} \quad q = -\frac{y}{z - c}.$$

Substituant ces valeurs de p et de q dans l'équation $px + qy = z$, on trouve :

$$x^2 + y^2 + z^2 - cz = 0.$$

Cette équation et celle de la sphère représentent simultanément la courbe de contact.

Si l'on remplace dans ces deux équations x par αz et y par βz, puis que l'on élimine z entre les équations résultantes, on trouve :

$$(\alpha^2 + \beta^2)(c^2 - R^2) - R^2 = 0;$$

et, en remplaçant α par $\frac{x}{z}$ et β par $\frac{y}{z}$:

$$(x^2 + y^2)(c^2 - R^2) - R^2 z^2 = 0,$$

équation d'un cône circulaire dont le sommet est l'origine, et l'axe, l'axe des z.

4. $x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = \frac{1}{xy}$.

Intégrale générale :

$$z + \frac{1}{2xy} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

5. $y \frac{dz}{dx} - x \frac{dz}{dy} = x + y$.

$$z = x - y + \varphi(x^2 + y^2).$$

6. $\sin x \frac{dz}{dx} + \cos x \frac{dz}{dy} = 1$.

$$z = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} x + \varphi(y - \log \sin x).$$

7. $\frac{1}{x^n} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{y^n} \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y^{n+1}}$.

$$z = \log y + \varphi(y^{n+1} - x^{n+1}).$$

8. $x^n \frac{dz}{dx} - x^{n-1} y \frac{dz}{dy} = yz$.

Équations simultanées :

$$\frac{dy}{x^{n-1}y} = -\frac{dx}{x^n} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{yz} = \frac{dx}{x^n}.$$

Intégrale générale de l'équation proposée :

$$ze^{\frac{y}{nx^{n-1}}} = \varphi(xy).$$

9. $\dfrac{y}{e^x}\dfrac{dz}{dx} + \dfrac{x}{e^y}\dfrac{dz}{dy} = xyz.$

Équations simultanées :

$$\frac{e^y dy}{x} = \frac{e^x dx}{y} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{xyz} = \frac{e^x dx}{y}.$$

Intégrale générale de l'équation proposée :

$$z = e^{(x-1)e^x}\varphi\left[(y-1)e^y - (x-1)e^x\right].$$

10. $\sqrt{1-x^2}\dfrac{dz}{dx} + \sqrt{1-y^2}\dfrac{dz}{dy} = x.$

Des équations simultanées

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \frac{dz}{x} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

on tire, pour intégrale générale de l'équation proposée :

$$z = -\sqrt{1-x^2} + \varphi\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right).$$

11. $x^2\dfrac{du}{dx} + y^2\dfrac{du}{dy} + z^2\dfrac{du}{dz} = u.$

Équations simultanées :

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}, \quad \frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \quad \text{et} \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x^2}.$$

Intégrale générale de l'équation proposée :

$$u = e^{-\frac{1}{x}} \varphi\left[\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right), \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)\right].$$

12. $a\frac{du}{dx} + b\frac{du}{dy} + c\frac{du}{dz} = e^{x+y+z}.$

Équations simultanées :

$$\frac{dy}{b} = \frac{dx}{a}, \quad \frac{dz}{c} = \frac{dx}{a}, \quad \frac{du}{e^{x+y+z}} = \frac{dx}{a}.$$

Intégrale générale de l'équation proposée :

$$u = \frac{1}{a+b+c} e^{x+y+z} + \varphi\left[\left(\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right), \left(\frac{y}{b} - \frac{x}{a}\right)\right].$$

13. $\sin x \frac{du}{dx} + y \cos x \frac{du}{dy} + z \operatorname{tang} x \frac{du}{dz} = u \operatorname{séc} x.$

Équations simultanées :

$$\frac{dy}{y \cos x} = \frac{dx}{\sin x}, \quad \frac{dz}{z \operatorname{tang} x} = \frac{dx}{\sin x}, \quad \frac{du}{u \operatorname{séc} x} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Intégrale générale de l'équation proposée :

$$u \operatorname{tang} x . \varphi\left[\frac{y}{\sin x}, \quad \frac{z}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}\right].$$

14. $\frac{y^2+z^2+u^2}{x}\frac{du}{dx} + \frac{x^2+z^2+u^2}{y}\frac{du}{dy} + \frac{x^2+y^2+u^2}{z}\frac{du}{dz} = \frac{x^2+y^2+z^2}{u}.$

De l'équation, on tire :

$$\frac{xdx}{y^2+z^2+u^2} = \frac{ydy}{x^2+z^2+u^2} = \frac{zdz}{x^2+y^2+u^2} = \frac{udu}{x^2+y^2+z^2}.$$

L'égalité de ces rapports donne :

$$\frac{xdx + ydy + zdz + udu}{3(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)} = \frac{ydy - xdx}{x^2 - y^2}.$$

D'où, en posant $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = s$:

$$\frac{1}{6}\frac{ds}{s} = -\frac{1}{2}\frac{d.(y^2 - x^2)}{y^2 - x^2},$$

ou

$$\frac{ds}{s} = -3\frac{d.(y^2 - x^2)}{y^2 - x^2};$$

et, par intégration,

$$\log s = -3\log(y^2 - x^2) + \log \alpha,$$

ou

$$s(y^2 - x^2)^3 = \alpha.$$

On trouverait, de même :

$$s(z^2 - x^2)^3 = \beta,$$

$$s(u^2 - x^2)^3 = \gamma.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$s(u^2 - x^2)^3 = \varphi\left[s(z^2 - x^2)^3, \quad s(y^2 - x^2)^3\right].$$

15. Intégrer l'équation linéaire du premier ordre après avoir cherché le facteur v qui rend l'intégration possible.

Au préalable, rappelons que si le premier membre de toute équation du premier ordre, $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$, n'est pas différentielle exacte, il existe toujours un facteur v tel que $v\,(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy)$ soit expression intégrable.

La condition d'intégrabilité fournit alors l'équation

$$\mathrm{M}\frac{dv}{dy} + v\frac{d\mathrm{M}}{dy} = \mathrm{N}\frac{dv}{dx} + v\frac{d\mathrm{N}}{dx},$$

ou

$$\mathrm{N}\frac{dv}{dx} - \mathrm{M}\frac{dv}{dy} = v\left(\frac{d\mathrm{M}}{dy} - \frac{d\mathrm{N}}{dx}\right); \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

équation aux dérivées partielles qui, dans un petit nombre de cas, peut servir à déterminer v.

Revenons à la question posée.

Dans l'équation linéaire de premier ordre, $dy+Pydx=Qdx$, présentée sous la forme

$$(Py-Q)\,dx+dy=0,$$

on a :

$$M=Py-Q, \quad N=1, \quad \text{d'où} \quad \frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=P.$$

Substituant ces valeurs de M, de N et de $\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}$ dans l'équation (1), on trouve :

$$\frac{dv}{dx}-(Py-Q)\frac{dv}{dy}=vP.$$

D'où les équations simultanées :

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{Q-Py}=\frac{dv}{vP}.$$

L'une d'elles,

$$\frac{dv}{vP}=\frac{dx}{1},$$

fournit facilement

$$v=e^{\int Pdx}.$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation proposée par $e^{\int Pdx}$, on obtient

$$e^{\int Pdx}dy+Pye^{\int Pdx}dx=e^{\int Pdx}Qdx,$$

ou

$$d\,.\,ye^{\int Pdx}=e^{\int Pdx}Qdx.$$

D'où, en intégrant,

$$y=e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}Qdx+C\right).$$

16. Intégrer, comme dans l'exemple précédent, les équations :

$$(4xy-1)\,dx+(1+x^2)\,dy=0,$$

$$(1+y)\,dx+(1+2x-4y)\,dy=0,$$

et

$$(x^2+y^2)\,dx-y\,(x-y)\,dy=0,$$

on obtient :

Multiplicateurs respectifs :

$$1 + x^2, \quad 1 + y \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^3 + y^3}.$$

Intégrales :

$$(1 + x^2)^2 y - x - \frac{x^3}{3} = C,$$

$$x(1 + y)^2 + y - \frac{3y^2}{2} - \frac{4y^3}{3} = C,$$

et

$$\frac{1}{3} \log(x + y)^2 \sqrt{x^2 - xy + y^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tang} \frac{2x - y}{y\sqrt{3}} = C.$$

SECTION II. — *Équations qui renferment les dérivées partielles* $\frac{dz}{dx} = p$ *et* $\frac{dz}{dy} = q$ *en puissances et en produits.*

Soit l'équation différentielle

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

dans laquelle z est fonction de x et de y, et les dérivées p et q des fonctions de x, de y et de z.

Puisque la dérivée totale de p par rapport à y doit être égale à celle de q par rapport à x, on a :

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz} q = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dz} p,$$

ou bien

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q \frac{dp}{dz} - p \frac{dq}{dz} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Cela posé, on démontre dans les cours que si, de l'équation (1), on tire la valeur de q :

$$q = f(x, y, z, p) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

et que l'on substitue dans l'équation (2) cette expression de q et celle de ses dérivées $\frac{dq}{dx}$ et $\frac{dq}{dz}$, on obtient une équation aux dérivées partielles, linéaire et de premier ordre, entre les quatre variables x, y, z et p.

L'intégration de cette équation, effectuée comme dans la section I, donne p, et la substitution de p dans l'équation (3) fait connaître q.

La substitution de ces valeurs de p et de q dans l'expression

$$dz = pdx + qdy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

fournit ensuite une équation différentielle qui, intégrée à son tour, conduit à la valeur de z.

La première intégration aura donné p avec une constante arbitraire α et, la seconde, z avec une autre constante arbitraire β. Restera à remplacer β par $\varphi(\alpha)$, c'est-à-dire une fonction arbitraire de α.

Nota. — Si, de l'équation (1), on tirait d'abord p en fonction de x, y, z et q, un procédé de calcul analogue conduirait à l'intégrale cherchée. (Voir l'exemple II.)

Exemple I.

Soit l'équation $p^2 + q^2 = 1$.

On en tire :

$$q = \pm\sqrt{1 - p^2},$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{\mp p}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dq}{dz} = \frac{\mp p}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dz}.$$

Substituant ces valeurs de q, $\frac{dq}{dx}$ et $\frac{dq}{dz}$ dans l'équation (2), on trouve :

$$\sqrt{1-p^2}\frac{dp}{dy} \pm p\frac{dp}{dx} \pm \frac{dp}{dz} = 0.$$

D'où les équations simultanées :

$$\frac{dy}{\sqrt{1-p^2}}=\frac{dx}{\pm p}=\frac{dz}{\pm 1}=\frac{dp}{0}.$$

L'une d'elles,

$$\frac{dp}{0}=\frac{dz}{\pm 1} \quad \text{ou} \quad dp=0, \quad \text{donne} \quad p=\alpha.$$

Par suite, $q=\pm\sqrt{1-\alpha^2}$.

La substitution de ces valeurs de p et de q dans l'équation (4) donne :

$$dz=\alpha dx\pm\sqrt{1-\alpha^2}\,dy,$$

et, par intégration,

$$z=\alpha x\pm\sqrt{1-\alpha^2}\,y+\varphi(\alpha).$$

Exemple II.

Soit $p=(qy+z)^2$;

d'où
$$\frac{dp}{dy}=2(qy+z)\left(y\frac{dq}{dy}+q\right).$$

et
$$\frac{dp}{dz}=2(qy+z)\left(y\frac{dq}{dz}+1\right).$$

La substitution dans l'équation (2) donne :

$$\frac{1}{qy+z}\frac{dq}{dx}-2y\frac{dq}{dy}+(z-qy)\frac{dq}{dz}=4q.$$

Donc les équations simultanées :

$$(qy+z)\,dx=\frac{dy}{-2y}=\frac{dz}{z-qy}=\frac{dq}{4q}.$$

De $\frac{dq}{4q}=\frac{dy}{-2y}$ ou $\frac{dq}{q}=-2\frac{dy}{y}$, on tire, en intégrant, $q=\frac{\alpha}{y^2}$.

Par suite, on obtient :

$$p=\left(\frac{\alpha}{y}+z\right)^2.$$

La substitution des valeurs de p et de q dans l'équation (3) fournit :

$$dz=\left(\frac{\alpha}{y}+z\right)^2 dx+\frac{\alpha}{y^2}dy,$$

ou

$$dz-\frac{\alpha}{y^2}dy=\left(\frac{\alpha}{y}+z\right)^2 dx,$$

ou encore

$$d.\left(\frac{\alpha}{y}+z\right)=\left(\frac{\alpha}{y}+z\right)^2 dx,$$

équation dont l'intégrale est

$$\left(\frac{\alpha}{y}+z\right)[x+\varphi(\alpha)]+1=0.$$

Exercices.

1. $p^2q^2=1$.

$$z=\alpha x\pm\frac{1}{\alpha}y+\varphi(\alpha).$$

2. $p^mq^n=1$.

On trouve $dp=0$, et, en faisant $p=\alpha^n$, on obtient :

$$z=\alpha^n x+\frac{1}{\alpha^m}y+\varphi(\alpha).$$

3. $p^n+q^n=1$.

$$z=\alpha x+(1-\alpha^n)^{\frac{1}{n}}y+\varphi(\alpha).$$

4. $pq=x$.

$$z=\frac{\alpha x^2}{2}+\frac{y}{\alpha}+\varphi(\alpha).$$

5. $pq = z$.

On trouve :

$$p = y + \alpha \quad \text{et} \quad q = \frac{z}{y+\alpha}.$$

D'où

$$dz = (y+\alpha)\,dx + \frac{z}{y+\alpha}\,dy,$$

ou

$$\frac{dz}{y+\alpha} - \frac{z\,dy}{(y+\alpha)^2} = dx,$$

ou encore

$$d\,.\left(\frac{z}{y+\alpha}\right) = dx.$$

Donc, par intégration,

$$z = (y+\alpha)\left[x + \varphi(\alpha)\right].$$

6. $pq = xy$.

On obtient :

$$dz = \sqrt{y^2+\alpha^2}\,dx + \frac{xy}{\sqrt{y^2+\alpha^2}}\,dy,$$

ou

$$dz = d\left(x\sqrt{y^2+\alpha^2}\right).$$

D'où

$$z = x\sqrt{y^2+\alpha^2} + \varphi(\alpha).$$

7. $q = p^2 x$.

$$z = 2\alpha\sqrt{x} + \alpha^2 y + \varphi(\alpha).$$

8. $q = p^2 z$.

$$\frac{z^2}{2} = \alpha x + \alpha^2 y + \varphi(\alpha).$$

9. $q = p^2 xy$.

$$z = 2\alpha\sqrt{x} + \frac{\alpha^2 y^2}{2} + \varphi(\alpha).$$

10. $q = (px + z)^2$.

Intégrale :

$$\left(\frac{\alpha}{x} + z\right)\left[y + \varphi(\alpha)\right] + 1 = 0.$$

11. $q = px + p^2$.

On trouve :

$$p = \alpha e^y; \text{ et, par suite, } q = \alpha x e^y + \alpha^2 e^{2y}.$$

D'où

$$dz = \alpha e^y dx + \alpha x e^y dy + \alpha^2 e^{2y} dy,$$

ou

$$dz = d \, . \, \alpha x e^y + \alpha^2 e^{2y} dy;$$

et, par intégration :

$$z = \alpha x e^y + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{2y} + \varphi(\alpha).$$

12. $\left(\frac{dz}{dx}\right)^m \left(\frac{dz}{dy}\right)^n x^a y^b z^c = 1.$

L'équation peut s'écrire :

$$\left(x^{\frac{a}{m}} z^{\frac{c}{m+n}} \frac{dz}{dx}\right)^m \left(y^{\frac{b}{n}} z^{\frac{c}{m+n}} \frac{dz}{dy}\right)^n = 1,$$

et, si l'on pose,

$$x' = \int x^{-\frac{a}{m}} dx, \quad y' = \int y^{-\frac{b}{n}} dy, \quad z' = \int z^{\frac{c}{m+n}} dz,$$

d'où

$$\frac{dz'}{dx'} = x^{\frac{a}{m}} z^{\frac{c}{m+n}} \frac{dz}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dz'}{dy'} = y^{\frac{b}{n}} z^{\frac{c}{m+n}} \frac{dz}{dy},$$

on voit que l'équation proposée devient :

$$\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^m \left(\frac{dz'}{dy'}\right)^n = 1;$$

d'où (voir exercice 2),

$$z' = \alpha^n x' + \frac{1}{\alpha^m} y' + \varphi(\alpha).$$

Remplaçant x', y' et z' par leurs valeurs, on trouve pour l'intégrale cherchée :

$$\frac{m+n}{m+n+c} z^{\frac{m+n+c}{m+n}} = \frac{m}{m-a} \alpha^n x^{\frac{m-a}{m}} + \frac{n}{n-b} \frac{1}{\alpha^m} y^{\frac{n-b}{n}} + \varphi(\alpha).$$

SECTION III. — *Équations linéaires d'un ordre supérieur au premier.*

Il n'existe point de méthodes générales pour intégrer des équations aux dérivées partielles d'un ordre supérieur au premier. Nous ne rappellerons que l'intégration de deux équations linéaires du second ordre, intégration qui se présente souvent dans des questions de physique mathématique.

1° Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + A\frac{d^2z}{dxdy} + B\frac{d^2z}{dy^2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dans laquelle A et B sont coefficients constants.

Si l'on pose $z = e^{\alpha x + \beta y}$, α et β étant des quantités indéterminées, on trouve l'équation auxiliaire :

$$\alpha^2 + A\alpha\beta + B\beta^2 = 0,$$

ou

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} + A\frac{\alpha}{\beta} + B = 0.$$

D'où, pour $\frac{\alpha}{\beta}$, deux valeurs qui peuvent être : ou réelles et inégales, ou imaginaires, ou réelles et égales. Dans les deux premiers cas, si l'on représente par m' et m'' les deux

valeurs, on obtient pour intégrales particulières de l'équation proposée,

$$z = e^{\beta(y+m'x)}, \qquad z = e^{\beta(y+m''x)};$$

et, pour intégrale générale,

$$z = \varphi(y + m'x) + \psi(y + m''x),$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires.

Dans le dernier cas, si l'on représente par m' chacune des valeurs réelles et égales, l'intégrale générale de l'équation (1) est :

$$z = \varphi(y + m'x) + x\psi(y + m'x).$$

Si le second membre de l'équation (1), au lieu d'être nul, était en général fonction de x et de y, on pourrait appliquer le procédé d'intégration qui suit.

2° Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{d^2z}{dxdy} + Q\frac{d^2z}{dy^2} = R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

dans laquelle P, Q et R représentent des fonctions de x, y, z, p et q.

Formons, méthode Monge, les systèmes d'équations :

$$\left\{\begin{array}{c} dy - m'dx = 0, \\ m'dp + Qdq - Rm'dx = 0; \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} dy - m''dx = 0, \\ m''dp + Qdq - Rm''dx = 0; \end{array}\right.$$

dans lesquels m' et m'' sont les racines de l'équation

$$m^2 - Pm + Q = 0.$$

Les intégrales $U = \alpha$ et $V = \beta$ des équations de l'un des systèmes fourniront pour intégrale première de l'équation

proposée, l'équation aux dérivées partielles de premier ordre

$$V = \varphi(U),$$

φ représentant une fonction arbitraire.

Et l'intégrale de cette dernière équation sera l'intégrale complète de l'équation (2).

Exemple I.

Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} - a^2\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

puis à déterminer les fonctions arbitraires de la solution.

Si, dans l'équation (qui se rencontre dans le calcul des petits mouvements des fluides élastiques), on pose $z = e^{\alpha x - \beta y}$, on obtient l'équation auxiliaire

$$\alpha^2 - a^2\beta^2 = 0.$$

D'où

$$\alpha = \pm a\beta.$$

De là, les intégrales particulières

$$z = e^{a\beta x + \beta y} = z^{\beta(y+ax)},$$

$$z = e^{-a\beta x + \beta y} = z^{\beta(y-ax)};$$

puis l'intégrale générale :

$$z = \varphi(y + ax) + \psi(y - ax).$$

Pour déterminer les fonctions arbitraires φ et ψ, supposons que l'on donne les valeurs de z et de $\frac{dz}{dx}$ pour $x = 0$; si l'on désigne ces valeurs par $f(y)$ et $f_1(y)$, on aura en faisant $x = 0$ dans l'intégrale générale et dans sa dérivée par rapport à x,

$$\varphi(y) + \psi(y) = f(y), \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

et

$$\varphi'(y) - \psi'(y) = \frac{1}{a} f_1(y) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Multipliant les deux membres de la seconde de ces équations par dy, intégrant et représentant $\int f_1(y)\,dy$ par $F(y)$, on obtient

$$\varphi(y) - \psi(y) = \frac{1}{a} F(y) + C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Par addition et soustraction, membre à membre, des équations (1) et (3), on trouve :

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\left[f(y) + \frac{1}{a} F(y) + C\right],$$

et

$$\psi(y) = \frac{1}{2}\left[f(y) - \frac{1}{a} F(y) - C\right];$$

d'où la valeur complètement déterminée de z,

$$z = \frac{f(y+ax) + f(y-ax)}{2} + \frac{F(y+ax) - F(y-ax)}{2a}.$$

Exemple II.

Soit l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + (a+b)\frac{d^2z}{dxdy} + ab\frac{d^2z}{dy^2} = x^m,$$

$m^2 - Pm + Q = 0$ donne

$$m^2 - (a+b)m + ab = 0,$$

équation dont les racines sont $+a$ et $+b$.

D'où les systèmes d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} dy - adx &= 0, \\ dp + bdq - x^m dx &= 0; \end{aligned}\right.$$

et

$$\left\{\begin{aligned} dy - bdx &= 0, \\ dp + adq - x^m dx &= 0. \end{aligned}\right.$$

La première des équations du premier système a pour intégrale

$$y - ax = \alpha$$

et, la seconde,

$$p + bq - \frac{x^{m+1}}{m+1} = \beta.$$

Une intégrale première de l'équation proposée est donc

$$p + bq - \frac{x^{m+1}}{m+1} = \varphi'(y - ax),$$

ou

$$\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \varphi'(y - ax), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

équation aux dérivées partielles de premier ordre qui fournit les équations simultanées :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{\frac{x^{m+1}}{m+1} + \varphi'(y - ax)}.$$

L'une de celles-ci,

$$\frac{dy}{b} = \frac{dx}{1},$$

a pour intégrale

$$y - bx = \alpha'.$$

L'autre,

$$\frac{dz}{\frac{x^{m+1}}{m+1} + \varphi'(y - ax)} = \frac{dx}{1},$$

si l'on remplace y par sa valeur tirée de l'intégrale précédente, donne :

$$dz = \frac{x^{m+1}}{m+1}dx + \varphi'[\alpha' + (b - a)x]\,dx,$$

ou bien,

$$dz = \frac{x^{m+1}}{m+1}dx + \frac{1}{b - a}\varphi'[\alpha + (b - a)x](b - a)\,dx;$$

puis, par intégration,

$$z - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \frac{1}{b-a}\varphi(y-ax) = \beta',$$

ou, plus simplement,

$$z = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \varphi(y-ax) = \beta'.$$

L'intégrale de l'équation (1) est donc

$$z - \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \varphi(y-ax) = \psi(y-bx).$$

D'où

$$z = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \varphi(y-ax) + \psi(y-bx), \qquad (2)$$

pour intégrale complète de l'équation proposée (*).

Exemple III.

Soit l'équation

$$x^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2xy\frac{d^2z}{dxdy} + y^2\frac{d^2z}{dy^2} = x^m y^n,$$

ou

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{y}{x}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{y^2}{x^2}\frac{d^2z}{dy^2} = x^{m-2}y^n.$$

La condition $m^2 - Pm + Q = 0$ donne

$$m^2 - 2\frac{y}{x}m + \frac{y^2}{x^2} = 0,$$

équation dont les racines sont toutes deux $\frac{y}{x}$.

(*) On aurait pu trouver l'intégrale (2) plus simplement, en cherchant d'abord, par la méthode de l'exemple précédent, l'intégrale de l'équation proposée, dépourvue du second membre, puis ajoutant au résultat l'expression de l'intégrale double $\int dx \int x^m dx$. Mais c'est là un procédé particulier.

D'où l'unique système d'équations :

$$\begin{cases} dy - \dfrac{y}{x}dx = 0, \\ dp + \dfrac{y}{x}dq - x^{m-2}y^n dx = 0. \end{cases}$$

L'intégrale de la première est $\dfrac{y}{x} = \alpha$.

La seconde, si l'on remplace y par αx, devient

$$dp + \alpha dq - \alpha^n x^{m+n-2}dx = 0,$$

et a pour intégrale

$$p + \alpha q - \frac{\alpha^n}{m+n-1}x^{m+n-1} = \beta,$$

ou

$$p + \frac{y}{x}q - \frac{x^{m-1}y^n}{m+n-1} = \beta.$$

L'intégrale première de l'équation proposée est donc

$$p + \frac{y}{x}q - \frac{x^{m-1}y^n}{m+n-1} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

et, si l'on intègre cette dernière équation, on trouve pour intégrale complète de l'équation proposée :

$$z = \frac{x^m y^n}{(m+n)(m+n-1)} + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercices.

1. $\dfrac{d^2z}{dx^2} - a\dfrac{d^2z}{dxdy} = 0.$

On trouve :

$$z = \varphi(y) + \psi(y - ax).$$

2. $\frac{d^2z}{dx^2} + a^2 \frac{d^2z}{dy^2} = 0.$

L'intégrale est

$$z = \varphi(y + ax\sqrt{-1}) + \psi(y - ax\sqrt{-1}).$$

3. $a^m \frac{d^2z}{dx^2} + 2b^m \frac{d^2z}{dxdy} + \left(\frac{b^2}{a}\right)^m \frac{d^2z}{dy^2} = 0.$

On obtient :

$$z = \varphi\left[y - \left(\frac{b}{a}\right)^m x\right] + x\psi\left[y - \left(\frac{b}{a}\right)^m x\right].$$

4. $(a^2 - b^2)\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) - 2(a^2 + b^2)\frac{d^2z}{dxdy} = 0.$

Intégrale :

$$z = \varphi\left(\frac{a+b}{a-b}x + y\right) + \psi\left(\frac{a-b}{a+b}x + y\right).$$

5. $\frac{d^2z}{dxdy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + abz = 0.$

De cette équation et de celles qui sont proposées dans les deux exercices suivants, on cherche l'intégrale par le procédé rappelé dans l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \mathrm{A}\frac{d^2z}{dxdy} + \mathrm{B}\frac{d^2z}{dy^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Que l'on pose $z = e^{\alpha x + \beta y}$, et l'on obtient pour équation auxiliaire

$$\alpha\beta + a\alpha + b\beta + ab = 0,$$

ou

$$(\alpha + b)(\beta + a) = 0.$$

Racines :

$$\alpha = -b \quad \text{et} \quad \beta = -a.$$

Intégrales particulières :

$$e^{-bx+\beta y} = e^{-bx}.e^{\beta y},$$
$$e^{\alpha x-ay} = e^{-ay}.e^{\alpha x}.$$

Intégrale générale :

$$z = e^{-bx}\varphi(y) + e^{-ay}\psi(x).$$

6. $\dfrac{d^2z}{dx^2} - a^2\dfrac{d^2z}{dy^2} + 2ab\dfrac{dz}{dx} + 2a^2b\dfrac{dz}{dy} = 0.$

On obtient :

$$z = e^{-2abx}\varphi(y+ax) + \psi(y-ax).$$

7. $\dfrac{d^3z}{dx^3} - (2a+b)\dfrac{d^3z}{dx^2dy} + (a^2+2ab)\dfrac{d^3z}{dxdy^2} - a^2b\dfrac{d^3z}{dy^3} = 0.$

Équation auxiliaire :

$$\frac{\alpha^3}{\beta^3} - (2a+b)\frac{\alpha^2}{\beta^2} + (a^2+2ab)\frac{\alpha}{\beta} - a^2b = 0;$$

dont les racines sont

$$\frac{\alpha}{\beta} = b, \quad \frac{\alpha}{\beta} = a \quad \text{et} \quad \frac{\alpha}{\beta} = a.$$

Intégrale :

$$z = \varphi(y+bx) + \psi(y+ax) + x\psi_1(y+ax).$$

8. $\dfrac{d^2z}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{dz}{dx} = a^2\dfrac{d^2z}{dy^2}.$

Si l'on pose $u = xz$, u étant nouvelle variable, on trouve :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx},$$

et

$$\frac{d^2u}{dy^2} = x\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Or, l'équation proposée peut s'écrire :

$$x\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{dz}{dx}=a^2x\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Par substitution, l'équation se transforme donc dans la suivante :

$$\frac{d^2u}{dx^2}=a^2\frac{d^2u}{dy^2}.$$

D'où (voir l'exemple I)

$$u=\varphi(y+ax)+\psi(y-ax).$$

L'intégrale de l'équation proposée est donc

$$z=\frac{1}{x}\left[\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)\right].$$

9. $\frac{d^2z}{dx^2}+4\frac{d^2z}{dxdy}+4\frac{d^2z}{dy^2}=x+y.$

Si l'on opère comme dans l'exemple II, on trouve pour intégrale première de l'équation proposée :

$$\frac{dz}{dx}+2\frac{dz}{dy}=xy-\frac{x^2}{2}+\varphi(y-2x);$$

et, pour intégrale complète,

$$z=\frac{x^2(y-x)}{2}+x\varphi(y-2x)+\psi(y-2x).$$

10. $\frac{d^2z}{dx^2}-5\frac{d^2z}{dxdy}+4\frac{d^2z}{dy^2}=xy.$

Intégrale première :

$$-\frac{dz}{dx}+4\frac{dz}{dy}=-\frac{x^2y}{2}-\frac{x^3}{6}+\varphi(y+x).$$

Intégrale complète :

$$z = \frac{x^3(4y + 5x)}{24} + \varphi(y + x) + \psi(y + 4x).$$

11. $q^2 \frac{d^2z}{dx^2} - 2pq \frac{d^2z}{dxdy} + p^2 \frac{d^2z}{dy^2} = 0.$

L'équation peut s'écrire :

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 2\frac{p}{q}\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{p^2}{q^2}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

et donne

$$m^2 + 2\frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2} = 0,$$

équation dont les racines sont égales : $m' = m'' = -\frac{p}{q}$.

D'où l'unique système d'équation :

$$\left\{\begin{aligned} dy + \frac{p}{q}dx &= 0, \\ -\frac{p}{q}dp + \frac{p^2}{q^2}dq &= 0; \end{aligned}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{aligned} pdx + qdy &= 0, \\ \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} &= 0. \end{aligned}\right.$$

La première peut s'écrire $dz = 0$; intégrale $z = \alpha$.

L'intégrale de la seconde est $\frac{p}{q} = \beta$.

Donc l'intégrale première de la proposée est

$$\frac{p}{q} = \varphi(z),$$

ou, puisque $\varphi(z) = \varphi(\alpha)$, constante que l'on peut désigner par C,

$$\frac{dz}{dx} - C\frac{dz}{dy} = 0.$$

D'où l'intégrale complète de l'équation proposée

$$z = \psi[y + x\varphi(z)].$$

12. $(1+pq+q^2)\frac{d^2z}{dx^2}+(q^2-p^2)\frac{d^2z}{dxdy}-(1+pq+p^2)\frac{d^2z}{dy^2}=0.$

Si l'on pose $p+q=\lambda$, l'équation peut s'écrire :

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{(q-p)\lambda}{1+q\lambda}\frac{d^2z}{dxdy}-\frac{1+p\lambda}{1+q\lambda}\frac{d^2z}{dy^2}=0,$$

et fournit

$$m^2-\frac{(q-p)\lambda}{1+q\lambda}m-\frac{1+p\lambda}{1+q\lambda}=0,$$

équation dont les racines sont :

$$m'=1 \quad \text{et} \quad m''=-\frac{1+p\lambda}{1+q\lambda}.$$

D'où les deux systèmes d'équations simultanées :

$$\left.\begin{aligned} dy-dx&=0,\\ (1+q\lambda)dp-(1+p\lambda)dq&=0;\end{aligned}\right\}\ldots \quad (1)$$

et

$$\left.\begin{aligned} (1+q\lambda)dy+(1+p\lambda)dx&=0,\\ dp+dq&=0.\end{aligned}\right\}\ldots \quad (2)$$

La première des équations (1) a pour intégrale $x-y=\alpha$. La seconde peut s'écrire :

$$dp-dq+\lambda(qdp-pdq)=0.$$

On a déjà posé :

$$p+q=\lambda.$$

Posons encore :

$$p-q=\mu.$$

D'où

$$p=\frac{\lambda+\mu}{2},\ q=\frac{\lambda-\mu}{2},\ dp=\frac{d\lambda+d\mu}{2} \quad \text{et} \quad dq=\frac{d\lambda-d\mu}{2}.$$

Par substitution de ces valeurs de p, q, dp et dq, la seconde des équations (1) devient, après simplification :

$$(2+\lambda^2)d\mu=\mu.\lambda d\lambda,$$

et donne pour intégrale :

$$\frac{\mu}{(2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}=\beta.$$

Une intégrale première de l'équation proposée est donc

$$\frac{\mu}{(2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}=\varphi(x-y),$$

ou

$$p-q=[2+(p+q)^2]^{\frac{1}{2}}\varphi(x-y).$$

Cette intégrale peut mener à l'intégrale complète de l'équation proposée comme suit :

On a $$dz=pdx+qdy.$$

Substituant à p et à q les valeurs trouvées plus haut, il vient :

$$dz=\frac{\lambda}{2}(dx+dy)+\frac{\mu}{2}(dx-dy);$$

ou, en remplaçant μ ou $p-q$ par $[2+(p+q)^2]^{\frac{1}{2}}\varphi(x-y)$,

$$dz=\frac{\lambda}{2}(dx+dy)+\frac{1}{2}(2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\varphi(x-y).(dx-dy).$$

Or, si l'on intègre la seconde des équations (2), on trouve :

$$p+q=\text{C} \quad \text{ou} \quad \lambda=\text{C},$$

et l'intégrale de l'équation précédente est

$$z+\psi(\lambda)=\frac{\lambda}{2}(x+y)+(2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\varphi_1(x-y),$$

en désignant l'intégrale de $\frac{1}{2}\varphi(x-y)(dx-dy)$ par $\varphi_1(x-y)$.

Donc l'intégrale

$$z+\psi(\lambda)=\frac{\lambda}{2}(x+y)+(2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\varphi_1(x-y),$$

combinée avec sa dérivée par rapport à λ, ou

$$\psi'(\lambda) = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{\lambda}{(2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}\varphi_1(x-y),$$

constitue l'intégrale complète de l'équation proposée.

CHAPITRE XVIII.

INTÉGRATION PAR SÉRIES.

Section I. — *Intégration par séries des différentielles de la forme $f(x)\,dx$.*

Quand, par les méthodes rappelées et appliquées dans les cinq premiers chapitres, on ne peut trouver exactement les intégrales des différentielles de la forme $f(x)\,dx$, on cherche à en obtenir la valeur approchée par leur développement en séries convergentes.

Pour cela, on développe d'abord en série la fonction $f(x)$ par le moyen le plus simple : soit par la division, soit par la formule du binôme, etc., soit par le théorème de Mac-Laurin; puis, intégrant, si c'est possible, chaque terme de la série multiplié au préalable par dx, la somme des intégrales, augmentée d'une constante arbitraire, constitue le développement cherché (*).

(*) Il existe des théorèmes, autres que celui de Mac-Laurin, pour développer $\int f(x)\,dx$ en série, mais ils ne sont guère employés.

Rappelons la formule donnée par Jean Bernoulli :

$$\int f(x)dx = \mathrm{C} + xf(x) - \frac{x^2}{1.2}f'(x) + \frac{x^3}{1.2.3}f''(x) - \cdots$$

formule que l'on tire facilement de celle de Taylor et qui permet, on le voit, d'obtenir le développement de l'intégrale au moyen de $f(x)$ et de ses dérivées.

Exemple.

Soit à chercher l'intégrale de $\frac{e^{ax}dx}{x}$.

Le théorème de Mac-Laurin donne :

$$e^{ax} = 1 + \frac{ax}{1} + \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \cdots$$

D'où

$$\frac{e^{ax}}{x} = \frac{1}{x} + a + \frac{a^2x}{1.2} + \frac{a^3x^2}{1.2.3} + \cdots$$

Si l'on multiplie chaque terme par dx et que l'on intègre, on trouve :

$$\int \frac{e^{ax}dx}{x} = \mathrm{C} + \log x + ax + \frac{a^2x^2}{1.2^2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3^2} + \text{etc.}$$

La règle que nous venons d'énoncer et d'appliquer donne un nouveau moyen de développer en séries certaines fonctions : celles dont on peut développer les dérivées.

Exemple.

Soit la fonction arc tang x, dont la dérivée est $\frac{1}{1+x^2}$.

Par division, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots$$

et

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \cdots$$

Des deux séries obtenues, on voit que la première est convergente quand on a $x < 1$; et, la seconde, quand on a $x > 1$.

Soit $x < 1$, on aura :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int x^2dx + \int x^4dx - \int x^6dx + \cdots,$$

ou

$$\text{arc tang}\, x = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

et comme pour $x = 0$, $C = 0$:

$$\text{arc tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Si l'on suppose $x > 1$, on obtiendra :

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int x^{-2}dx - \int x^{-4}dx + \int x^{-6}dx - \int x^{-8}dx + \cdots,$$

ou

$$\text{arc tang}\, x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \cdots$$

et comme pour $x = \infty$, $C = \frac{\pi}{2}$:

$$\text{arc tang}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \cdots$$

Exercices.

1. $\int e^{-x^2}dx$. (Intégrale souvent employée dans le calcul des chances.)

Le théorème de Mac-Laurin donne :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

Si l'on remplace x par $-x^2$,

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1\,2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \cdots$$

D'où

$$\int e^{-x^2}dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{1.2}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{1.2.3}\frac{x^7}{7} + \dots$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$.

La formule du binôme fournit :

$$(1+x^n)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^n + \frac{1.3}{2.4}x^{2n} - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{3n} + \dots$$

Et, par suite,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} = C + x - \frac{1}{2}\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \text{etc.}$$

3. $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\,dx.$

Si l'on développe $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$ par le binôme et que l'on multiplie tous les termes par $x^m dx$, on trouve :

$$\int x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}dx = C + a^{\frac{p}{q}}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{p}{q}\cdot\frac{b}{a}\frac{x^{n+m+1}}{n+m+1} + \frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{1.2}\frac{b^2}{a^2}\frac{x^{2n+m+1}}{2n+m+1} + \text{etc.}\right].$$

4. $\displaystyle\int \sqrt{1-K^2\sin^2 x}\,dx.$

On obtient :

$$\int \sqrt{1-K^2\sin^2 x}\,dx = C + x - \frac{1}{2}K^2\int \sin^2 x dx$$

$$\dots - \frac{1.1}{2.4}K^4\int \sin^4 x dx - \text{etc.}$$

Pour les intégrales du second membre, voir chapitre III, section II, exercice 3.

5. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}}.$

Développer $(1-K^2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par le binôme, puis multiplier tous les termes par $\dfrac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. On a :

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1-K^2x^2}} = C + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$+\frac{1}{2}K^2\int \frac{x^4dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}K^4\int \frac{x^6dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \text{etc.}$$

Voir, pour obtenir les intégrales du second membre, exemple III, chapitre III, section II.

6. Développer arc sin x, dont la dérivée est $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

On obtient :

$$\text{arc sin } x = C + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

Pour $x = 0$,

$$C = 0.$$

Donc

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \text{etc.}$$

7. Développer arc séc x, dont la dérivée est $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

On trouve :

$$\text{arc séc } x = C - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5x^5} + \text{etc.}$$

Pour $x = \infty$,

$$C = -\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\text{arc séc}\, x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\frac{1}{5x^5} - \text{etc.}$$

8. Développer $\log(a+x)$ dont la dérivée est $\frac{1}{a+x}$.

Par division, $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \text{etc.}$

D'où

$$\log(a+x) = C + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}$$

Pour $x = 0$,

$$C = \log a.$$

Par conséquent,

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{etc.}$$

9. Développer la fonction qui a pour dérivée $\frac{1}{2-2x+x^2}$.

La fonction dont on donne la dérivée est

$$\int \frac{dx}{2-2x+x^2} = \int \frac{dx}{1+(x-1)^2} = \text{arc tang}\,(x-1).$$

D'autre part, si l'on multiplie les deux termes de $\frac{1}{2-2x+x^2}$ par $2+2x+x^2$, on obtient :

$$\frac{1}{2-2x+x^2} = \frac{1}{4}(2+2x+x^2)\,\frac{1}{1+\frac{x^4}{4}}$$

et, en développant $\frac{1}{1+\frac{x^4}{4}}$ par division,

$$\frac{1}{2-2x+x^2} = \frac{1}{4}(2+2x+x^2)\left(1 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{4^2} - \frac{x^{12}}{4^3} + \text{etc.}\right),$$

ou

$$\frac{1}{2-2x+x^2}=\left(\frac{2}{4}+\frac{2x}{4}+\frac{x^2}{4}\right)-\left(\frac{2x^4}{4^2}+\frac{2x^5}{4^2}+\frac{x^6}{4^2}\right)$$
$$+\left(\frac{2x^8}{4^3}+\frac{2x^9}{4^3}+\frac{x^{10}}{4^3}\right)-\text{etc.}$$

D'où

$$\int\frac{dx}{2-2x+x^2}=\frac{2}{4}\int\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{4}+\frac{x^6}{2.4}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{x^8}{4^2}+\frac{x^9}{4^2}+\frac{x^{10}}{2.4^2}\right)-\text{etc.}\right]dx,$$

ou bien

$$\text{arc tang}\,(x-1)=\mathrm{C}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{1.1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x^5}{4.5}+\frac{x^6}{4.6}+\frac{x^7}{8.7}\right)+\left(\frac{x^9}{16.9}+\frac{x^{10}}{16.10}+\frac{x^{11}}{32.11}\right)-\text{etc.}\right].$$

Pour $x=0$,

$$\mathrm{C}=-\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$\text{arc tang}\,(x-1)=-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{1.1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x^5}{4.5}+\frac{x^6}{4.6}+\frac{x^7}{8.7}\right)+\left(\frac{x^9}{16.9}+\frac{x^{10}}{16.10}+\frac{x^{11}}{32.11}\right)-\text{etc.}\right].$$

10. Développer la fonction dont la dérivée est

$$\frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

Si l'on pose $\sqrt{1+x^2}=x+z$, on trouve :

$$\int\frac{(1+x)-\sqrt{1+x^2}}{x}dx=2\log(1+z)-\log z-z,$$

ou, en remplaçant z par $\sqrt{1+x^2}-x$,

$$\int \frac{(1+x)-\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx = 2\log\left(1+\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

$$-\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+x-\sqrt{1+x^2}.$$

D'autre part, après avoir développé $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ par le binôme, on obtient :

$$\frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{x} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2.4}x^3-\frac{1.3}{2.4.6}x^5+\text{etc.}$$

D'où

$$\int \frac{(1+x)-\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$

$$=\int\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2.4}x^3-\frac{1.3}{2.4.6}x^5+\text{etc.}\right]dx,$$

et, par suite,

$$2\log\left(1+\sqrt{1+x^2}-x\right)-\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+x$$

$$-\sqrt{1+x^2}=C+x-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2.4^2}x^4-\frac{1.3}{2.4.6^2}x^6+\text{etc.}$$

Pour $x=0$,

$$C = 2\log 2 - 1.$$

Donc

$$2\log\left(1+\sqrt{1+x^2}-x\right)-\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+x-\sqrt{1+x^2}$$

$$=2\log 2-1+x-\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2.4^2}x^4-\frac{1.3}{2.4.6^2}x^6+\text{etc.}$$

Ces deux derniers exercices sont tirés de l'excellent ouvrage de E. Catalan : *Traité élémentaire des séries*, chapitre V.

Section II. — *Intégration par séries des équations différentielles.*

Pour développer en série l'intégrale d'une équation différentielle d'un ordre quelconque, on emploie principalement : 1° le théorème de Taylor; 2° le théorème de Mac-Laurin; 3° la méthode des coefficients indéterminés.

Si la série obtenue peut être sommée, évidemment, on trouve l'intégrale exacte; sinon, on n'obtient l'intégrale que d'une manière approchée, ce qui, du reste, est le véritable but de ces développements.

Les exemples suivants suffiront pour mettre dans tout leur jour les théories générales présentées à ce sujet dans les cours, et pour permettre aux élèves de résoudre les dernières questions de cet ouvrage.

Exemple I.

Soit à développer, par le théorème de Taylor, par celui de Mac-Laurin et par la méthode des coefficients indéterminés, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay.$$

1° Si, dans la formule de Taylor, on remplace x par la valeur arbitraire x_0 et h par $x - x_0$, on trouve :

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} F'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} F''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} F'''(x_0) + \text{etc.}, \quad . \quad . \quad (1)$$

expression dans laquelle y_0 désigne ce que devient la fonction $y = F(x)$ quand $x = x_0$.

Cela posé, l'équation proposée

$$F''(x) = ay$$

et ses dérivées successives :

$$F'''(x) = aF'(x),$$
$$F^{IV}(x) = aF''(x) = a^2 y,$$
$$F^{V}(x) = aF'''(x) = a^2 F'(x), \text{ etc.},$$

deviennent, pour $x = x_0$:

$$F''(x_0) = ay_0,$$
$$F'''(x_0) = aF'(x_0),$$
$$F^{IV}(x_0) = a^2 y_0,$$
$$F^{V}(x_0) = a^2 F'(x_0), \text{ etc.}$$

Substituant ces valeurs de $F''(x_0)$, $F'''(x_0)$, etc., dans l'expression (1) et rassemblant tous les termes qui contiennent y_0 et tous ceux qui renferment $F'(x_0)$, on obtient :

$$y = y_0 \left[1 + \frac{a(x-x_0)^2}{1.2} + \frac{a^2(x-x_0)^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right]$$
$$+ F'(x_0)\left[\frac{x-x_0}{1} + \frac{a(x-x_0)^3}{1.2.3} + \frac{a^2(x-x_0)^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right],$$

ou bien, ce que l'on peut aisément vérifier :

$$y = y_0 \frac{e^{\sqrt{a}(x-x_0)} + e^{-\sqrt{a}(x-x_0)}}{2} + F'(x_0)\frac{e^{\sqrt{a}(x-x_0)} - e^{\sqrt{a}(x-x_0)}}{2\sqrt{a}}.$$

Ce résultat peut s'écrire ainsi :

$$y = e^{-\sqrt{a}x_0}\left[\frac{y_0}{2} + \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{a}}\right]e^{\sqrt{a}x} + e^{\sqrt{a}x_0}\left[\frac{y_0}{2} - \frac{F'(x_0)}{2\sqrt{a}}\right]e^{-\sqrt{a}x},$$

ou, si l'on désigne les coefficients constants de $e^{\sqrt{a}x}$ et de $e^{-\sqrt{a}x}$ par C_1 et C_2 :

$$y = C_1 e^{\sqrt{a}x} + C_2 e^{-\sqrt{a}x}.$$

2° La formule de Mac-Laurin est

$$y = y_0 + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}F'''(0) + \text{etc}, \quad (2)$$

y_0 représentant ce que devient la fonction $y = F(x)$ pour $x = 0$.

L'équation proposée et ses dérivées donnent pour $x=0$:

$$F''(0)=ay_0,\ F'''(0)=aF'(0),\ F^{IV}(0)=a^2y_0,\ F^{V}(0)=a^2F'(0)\cdots$$

Substituant ces valeurs de $F''(0)$, de $F'''(0)$, etc., dans la formule (2), on trouve :

$$y=y_0\left[1+\frac{ax^2}{1.2}+\frac{a^2x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}\right]$$

$$+F'(0)\left[\frac{x}{1}+\frac{ax^3}{1.2.3}+\frac{a^2x^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}\right],$$

ou, par une transformation semblable à celle employée dans le 1°,

$$y=C_1e^{\sqrt{a}x}+C_2e^{-\sqrt{a}x}.$$

3° Posons, en supposant que y peut se développer suivant les puissances entières et positives de x,

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\cdots \qquad (3)$$

A, B, C, etc., étant des coefficients constants à déterminer.

De l'expression (3), on tire :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2C+2.3Dx+3.4Ex^2+4.5Fx^3+\cdots$$

et

$$ay=Aa+Bax+Cax^2+Dax^3+\cdots$$

En vertu de l'équation proposée, les coefficients des mêmes puissances de x doivent être égaux ; donc il faut qu'on ait :

$$2C=Aa,\ \ 2.3.D=Ba,\ \ 3.4.E=Ca,\ \ 4.5.F=Da\ldots$$

D'où l'on tire :

$$C=\frac{Aa}{1.2},\ \ D=\frac{Ba}{1.2.3},\ \ E=\frac{Aa^2}{1.2.3.4},\ \ F=\frac{Ba^2}{1.2.3.4.5}\cdots$$

La substitution de ces valeurs de C, D, E, etc., dans l'expression (3) donne

$$y = A + Bx + \frac{Aa}{1.2}x^2 + \frac{Ba}{1.2.3}x^3 + \frac{Aa^2}{1.2.3.4}x^4$$
$$+ \frac{Ba^2}{1.2.3.4.5}x^5 + \text{etc.};$$

ou bien,

$$y = A\left(1 + \frac{ax^2}{1.2} + \frac{a^2x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ B\left(\frac{x}{1} + \frac{ax^3}{1.2.3} + \frac{a^2x^5}{1.2.3.4.5} + \text{etc.}\right),$$

ou encore :

$$y = C_1 e^{\sqrt{ax}} + C_2 e^{-\sqrt{ax}}.$$

Exemple II.

Soit à développer, par le théorème de Mac-Laurin, l'intégrale de l'équation

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

De l'équation

$$xF''(x) + 2F'(x) + xy = 0,$$

et de ses dérivées successives :

$$xF'''(x) + 3F''(x) + xF'(x) + y = 0,$$
$$xF^{IV}(x) + 4F'''(x) + xF''(x) + 2F'(x) = 0,$$
$$xF^{V}(x) + 5F^{IV}(x) + xF'''(x) + 3F''(x) = 0,$$
$$xF^{VI}(x) + 6F^{V}(x) + xF^{IV}(x) + 4F'''(x) = 0, \text{ etc.},$$

on tire, en faisant $x = 0$,

$$F'(0) = 0,\quad F''(0) = -\frac{y_0}{3},\quad F'''(0) = 0,\quad F^{IV}(0) = \frac{y_0}{5},$$
$$F^{V}(0) = 0,\quad F^{VI}(0) = -\frac{y_0}{7}, \text{ etc.}$$

Substituant les valeurs de $F'(0)$, $F''(0)$, etc., dans la formule de Mac-Laurin, on a :

$$y = y_0\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}\right).$$

Mais on sait que

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

D'où

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

Donc, en remplaçant la constante y_0 par C, on obtient, pour intégrale de l'équation donnée,

$$y = C\frac{\sin x}{x};$$

intégrale particulière puisqu'elle ne contient qu'une constante arbitraire.

Pour obtenir l'intégrale générale cherchée, considérons C comme une fonction de x et suivons la méthode connue.

De $y = C\dfrac{\sin x}{x}$, il faudrait tirer les dérivées $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ et substituer dans l'équation proposée.

On parvient plus facilement au résultat en écrivant l'équation $y = C\dfrac{\sin x}{x}$ sous la forme

$$xy = C\sin x.$$

On en tire :

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{dC}{dx}\sin x + C\cos x,$$

et

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = \frac{d^2C}{dx^2}\sin x + 2\frac{dC}{dx}\cos x - C\sin x.$$

Additionnant la première et la troisième de ces équations, on obtient

$$\frac{d^2C}{dx^2}\sin x + 2\frac{dC}{dx}\cos x = 0.$$

Si l'on pose $\frac{dC}{dx} = p$, on a :

$$\frac{dp}{dx}\sin x + 2p\cos x = 0.$$

D'où

$$\frac{dp}{p} + 2\operatorname{cotg} x\, dx = 0\,;$$

et, par intégration,

$$\log p + \log \sin^2 x = \log C'.$$

Donc

$$p = \frac{C'}{\sin^2 x},$$

ou

$$\frac{dC}{dx} = \frac{C'}{\sin^2 x}.$$

D'où, par nouvelle intégration,

$$C = -C' \operatorname{cotg} x + C''.$$

Substituant cette valeur de C dans l'intégrale particulière, on obtient, pour l'intégrale générale cherchée :

$$y = C''\frac{\sin x}{x} - C'\frac{\cos x}{x},$$

ou, en remplaçant C'' par $A\cos\lambda$ et C' par $-A\sin\lambda$,

$$y = \frac{A}{x}\sin(x+\lambda)$$

Exemple III.

Soit à développer, par la méthode des coefficients indéterminés, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ax^n y = 0.$$

Posons

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + \cdots \tag{3}$$

série ordonnée suivant les puissances croissantes de x et dans laquelle les coefficients A, B, C ... et les exposants α, β, γ ... désignent des quantités indéterminées.

De l'expression (3), on tire

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta - 1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma - 1)x^{\gamma-2} + D\delta(\delta - 1)x^{\delta-2} + \cdots$$

et

$$ax^n y = Aax^{\alpha+n} + Bax^{\beta+n} + Cax^{\gamma+n} + Dax^{\delta+n} + \cdots$$

Additionnant ces deux équations membre à membre, on trouve, en vertu de l'équation proposée :

$$\begin{bmatrix} A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + C\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + D\delta(\delta-1)x^{\delta-2} + \cdots \\ + Aax^{\alpha+n} \quad + Bax^{\beta+n} \quad + Cax^{\gamma+n} \quad + \cdots \end{bmatrix} = 0.$$

Pour que le premier membre de cette équation soit nul comme le second, c'est-à-dire pour que l'équation soit identique, il faut d'abord, puisque $\alpha - 2$ est le plus petit des exposants de x, que l'on ait :

$$A\alpha(\alpha - 1) = 0,$$

ou plutôt, puisque A ne peut être nul,

$$\alpha(\alpha - 1) = 0$$

L'identité sera complète si l'on pose ensuite

$$\beta - 2 = \alpha + n, \quad \gamma - 2 = \beta + n, \quad \delta - 2 = \gamma + n \ldots \quad (4)$$

et

$$B\beta(\beta - 1) + Aa = 0, \; C\gamma(\gamma - 1) + Ba = 0, \; D\delta(\delta - 1) + Ca = 0 \ldots \quad (5)$$

On satisfait à l'équation $\alpha(\alpha - 1) = 0$, par $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$.

1° Soit $\alpha = 0$.

Les équations (4) donnent :

$$\beta = n + 2, \quad \gamma = 2n + 4, \quad \delta = 3n + 6, \ldots$$

et, par suite, on tire des équations (5)

$$B = -\frac{Aa}{(n+1)(n+2)},$$

$$C = +\frac{Aa^2}{1.2(n+1)(2n+3)(n+2)^2},$$

$$D = -\frac{Aa^3}{1.2.3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3},$$

. . . .

Substituant ces valeurs de α, β, γ, δ ... et de B, C, D ... dans l'équation (3), on obtient :

$$y = A\left[1 - \frac{ax^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+4}}{1.2(n+1)(2n+3)(n+2)^2} - \frac{a^3x^{3n+6}}{1.2.3(n+1)(2n+3)(3n+5)(n+2)^3} + \text{etc.}\right] \quad (6)$$

C'est une intégrale particulière de l'équation proposée, puisqu'elle ne contient que la seule constante arbitraire A.

2° Soit $\alpha = 1$.

Si l'on opère comme nous venons de le faire pour $\alpha = 0$,

et que l'on change A en A', on trouve cette autre intégrale particulière :

$$y = A'\left[x - \frac{ax^{n+3}}{(n+3)(n+2)} + \frac{a^2x^{2n+5}}{1.2(n+3)(2n+5)(n+2)^2}\right.$$
$$\left. - \frac{a^3x^{3n+7}}{1.2.3(n+3)(2n+5)(3n+7)(n+2)^3} + \text{etc.}\right] \quad (7)$$

La somme des deux intégrales particulières est l'intégrale générale cherchée.

Remarque I. — Lorsque $n = -2$, les séries (6) et (7) sont en défaut, car les dénominateurs de leurs termes deviennent nuls; donc ces termes eux-mêmes, infinis. Mais l'équation est alors :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ay}{x^2} = 0,$$

et peut s'intégrer comme suit :

Si l'on pose

$$y = Ax^{\alpha},$$

on trouve :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha - 1)\,x^{\alpha-2},$$

et

$$\frac{ay}{x^2} = Aax^{\alpha-2};$$

et, par addition, membre à membre, de ces deux équations,

$$\alpha(\alpha - 1) + a = 0.$$

Si donc on représente par α_1 et α_2 les racines de cette équation du second degré en α, l'intégrale générale est

$$y = A_1x^{\alpha_1} + A_2x^{\alpha_2}.$$

Remarque II. — Des séries (6) et (7), la première est en défaut, sans que la seconde le soit, quand $n = -\frac{2r-1}{r}$;

tandis que la seconde est en défaut, mais non la première, quand $n = -\frac{2r+1}{r}$, r désignant un nombre entier. Dans chacun de ces cas, on n'obtient donc qu'une intégrale particulière.

Pour trouver l'intégrale générale, posons avec Euler :

$$y = u + v \log Cx,$$

u représentant une fonction de x à déterminer, v l'intégrale particulière et C une constante arbitraire.

On aura :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2} \log Cx + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2},$$

$$ax^n y = ax^n u + ax^n v \log Cx.$$

Par addition de ces équations membre à membre, on trouve après simplification :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} + aux^n = 0,$$

équation qui, intégrée, donne u.

Soit, par exemple,

$$n = -1.$$

L'équation sera $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ay}{x} = 0$ et la série (7) en fournira l'intégrale particulière :

$$v = A\left[x - \frac{ax^2}{1.2} + \frac{a^2x^3}{1.2^2.3} - \frac{a^3x^4}{1.2^2.3^2.4} + \text{etc.}\right].$$

Après avoir posé

$$y = u + v \log Cx,$$

l'équation qui déterminera u sera

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} + \frac{au}{x} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$u = B + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \text{etc.}$$

On trouvera :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 1.2B_2 + 2.3B_3 x + 3.4B_4 x^2 + \text{etc.},$$

$$\frac{2}{x}\frac{dv}{dx} = 2A\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{1} + \frac{a^2x}{1.2^2} - \frac{a^3x^2}{1.2^2.3^2} + \text{etc.}\right),$$

$$-\frac{v}{x^2} = -A\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{1.2} + \frac{a^2x}{1.2^2.3} - \frac{a^3x^2}{1.2^2.3^2.4} + \text{etc.}\right),$$

$$\frac{au}{x} = a\left(\frac{B}{x} + B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \text{etc.}\right).$$

Si l'on additionne ces quatre équations membre à membre et que, pour rendre identique l'équation résultante, on égale à 0 la somme des coefficients des mêmes puissances de x, on obtient :

$$A + aB = 0,$$

$$2B_2 - \frac{3aA}{2} + aB_1 = 0,$$

$$2.3.B_3 + \frac{5a^2A}{2^2.3} + aB_2 = 0, \text{ etc.}$$

D'où l'on tire, avec deux constantes arbitraires A et B_1,

$$B = -\frac{A}{a}, \quad B_2 = \frac{3aA}{2^2} - \frac{aB_1}{2}, \quad B_3 = -\frac{14a^2A}{2^3.3^2} + \frac{a^2B_1}{2^2.3}, \text{ etc.}$$

Mais puisque l'on a déjà introduit la constante arbitraire C dans $\log Cx$, on peut faire $B_1 = 0$, et l'on a :

$$B = -\frac{A}{a}, \quad B_2 = \frac{3aA}{2^2}, \quad B_3 = -\frac{14a^2A}{2^3.3^2}, \text{ etc.}$$

L'intégrale cherchée est donc

$$y = -A\left[\frac{1}{a} - \frac{3a}{2^2}x^2 + \frac{14a^2}{2^3.3^2}x^3 - \text{etc.}\right]$$
$$+ A\left[x - \frac{ax^2}{1.2} + \frac{a^2x^3}{1.2^2.3} - \frac{a^3x^4}{1.2^2.3^2.4} + \text{etc.}\right]\log Cx.$$

(Euler.)

Exercices.

1. Développer, comme dans l'exemple I, l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = ay.$$

Séries sommées, on obtient, résultat prévu :

$$y = Ce^{ax}.$$

2. Développer, par le théorème de Mac-Laurin, l'intégrale de l'équation

$$\frac{dy}{dx} + y + x^3 = 0.$$

On obtient d'abord

$$y = y_0\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\right)$$
$$+ (y_0 - 6)\left(\frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \text{etc.}\right).$$

Cette expression peut s'écrire :

$$y = (y_0 - 6)\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ 6\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\right).$$

En désignant la constante $y_0 - 6$ par C, l'intégrale cherchée est donc

$$y = Ce^{-x} + 6(1 - x) + 3x^2 - x^3.$$

3. Développer, par le théorème de Taylor, l'intégrale de l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ay^2.$$

Si l'on désigne y_0 par C_1 et $F'(x_0)$ par C_2, on obtient :

$$y = C_1 + C_2(x - x_0) + \frac{aC_1^2}{1.2}(x - x_0)^2 + \frac{2aC_1C_2}{1.2.3}(x - x_0)^3$$
$$+ \frac{2a^2C_1^3 + 2aC_2^2}{1.2.3.4}(x - x_0)^4 + \text{etc.}$$

4. Développer, par le théorème de Mac-Laurin et par la méthode des coefficients indéterminés, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - ax + y = 0.$$

On trouve d'abord :

$$y = C_1\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}\right)$$
$$+ C_2\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{etc.}\right)$$
$$+ a\left(\frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} - \text{etc.}\right)$$

Donc, en se rappelant les développements de cos x et de sin x,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + ax.$$

5. Développer, par le théorème de Mac-Laurin, l'intégrale de l'équation

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0.$$

Le théorème employé ne fournit que l'intégrale particulière

$$y=A\left[1-\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{1^2.2^2}-\frac{x^3}{1^2.2^2.3^2}+\frac{x^4}{1^2.2^2.3^2.4^2}-\text{etc.}\right].$$

Pour trouver l'intégrale générale, on représente l'intégrale particulière par v, et l'on pose, comme dans l'exemple III :

$$y=u+v\log Cx.$$

On obtient pour l'équation en u :

$$x\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}+u=0,$$

et, intégrant par la méthode des coefficients indéterminés, après avoir posé

$$u=B+B_1x+B_2x^2+B_3x^3+B_4x^4+\cdots,$$

on trouve

$$u=2A\left(x-\frac{3x^2}{2^3}+\frac{11x^3}{2^3 3^3}-\frac{51x^4}{2^3.3^3.4^3}+\text{etc.}\right)+\frac{B}{A}v.$$

Par suite,

$$y=2A\left(x-\frac{3x^2}{2^3}+\frac{11x^3}{2^3.3^3}-\frac{51x^4}{2^3.3^3.4^3}+\text{etc.}\right)$$

$$+A\left(1-\frac{x}{1^2}+\frac{x^2}{1^2.2^2}-\frac{x^3}{1^2.2^2.3^2}+\frac{x^4}{1^2.2^2.3^2.4^2}-\text{etc.}\right)\log Cx,$$

car on peut faire $\frac{B}{A}=0$, à cause de la constante renfermée dans $\log Cx$.

6. Chercher, par développement, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{a^2y}{x^4} = 0.$$

Si l'on remplace a par $-a^2$ et que l'on fasse $n=-4$ dans le résultat obtenu pour l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^ny = 0$, exemple III, on a

$$y = \mathrm{A}\left[1 + \frac{1}{1.2.3}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{a^6}{x^6} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \mathrm{A}'\left[x + \frac{1}{1.2}\frac{a^2}{x} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{a^4}{x^3} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\frac{a^6}{x^5} + \text{etc.}\right],$$

résultat qu'on peut écrire

$$y = \mathrm{A}.\frac{x}{a}\left[\frac{a}{x} + \frac{1}{1.2.3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{a^5}{x^5} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\frac{a^7}{x^7} + \text{etc.}\right]$$
$$+ \mathrm{A}'x\left[1 + \frac{1}{1.2}\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{1.2.3.4}\frac{a^4}{x^4} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\frac{a^6}{x^6} + \text{etc.}\right],$$

ou bien, comme il est facile de s'en assurer,

$$y = \mathrm{A}\frac{x}{a}\left(\frac{e^{\frac{a}{x}} - e^{-\frac{a}{x}}}{2}\right) + \mathrm{A}'x\left(\frac{e^{\frac{a}{x}} + e^{-\frac{a}{x}}}{2}\right)$$

ou encore

$$y = x\left[\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}' + \frac{\mathrm{A}}{a}\right)e^{\frac{a}{x}} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}' - \frac{\mathrm{A}}{a}\right)e^{-\frac{a}{x}}\right].$$

Donc si l'on désigne

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{A}' + \frac{\mathrm{A}}{a}\right) \text{ par } \mathrm{C}_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}' - \frac{\mathrm{A}}{a}\right) \text{ par } \mathrm{C}_2,$$

l'intégrale cherchée est

$$y = x\left(\mathrm{C}_1 e^{\frac{a}{x}} + \mathrm{C}_2 e^{-\frac{a}{x}}\right).$$

7. Chercher, par développement, l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a^2y}{x^4} = 0.$$

Si l'on opère comme dans l'exercice précédent, on obtient :

$$y = x\left(\frac{A}{a}\sin\frac{a}{x} + A'\cos\frac{a}{x}\right).$$

8. Développer l'intégrale de l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ay}{x^3} = 0,$$

c'est chercher l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^ny = 0$, quand $n = -3$.

Si l'on opère comme on l'a fait pour $n = -1$, dans la remarque II de l'exemple III, on trouve d'abord l'intégrale particulière

$$v = A\left[1 - \frac{1}{1.2}\frac{a}{x} + \frac{1}{1.2^2.3}\frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{1.2^2.3^2.4}\frac{a^3}{x^3} + \text{etc.}\right],$$

et, après avoir posé

$$y = u + v\log Cx$$

et

$$u = B'x + B + B_1x^{-1} + B_2x^{-2} + B_3x^{-3} + \text{etc.},$$

on obtient pour l'intégrale générale cherchée

$$y = A\left[\frac{1}{a}x - \frac{3a}{1^3.2^2}\frac{1}{x} + \frac{14a^2}{1^3.2^3.3^2}\frac{1}{x^2} - \frac{70a^3}{1^3.2^3.3^3.4^2}\frac{1}{x^3} + \text{etc.}\right]$$

$$+ A\left[1 - \frac{1}{1.2}\frac{a}{x} + \frac{1}{1.2^2.3}\frac{a^2}{x^2} - \frac{1}{1.2^2.3^2.4}\frac{a^3}{x^3} + \text{etc.}\right]\log Cx.$$

9. Développer l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ay}{x^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

c'est chercher l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} + ax^ny = 0$, quand $n = -\frac{3}{2}$.

Si l'on opère comme dans l'exercice précédent en faisant

$$u = B + B_1x^{\frac{1}{2}} + B_2x + B_3x^{\frac{3}{2}} + B_4x^2 + \cdots$$

on obtient :

$$y = -A\left[\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a}x^{\frac{1}{2}} - \frac{8.4a}{1^2.3^2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{100.16a^2}{1^2.2^2.3^2.4^2}x^2 - \text{etc.}\right]$$
$$+ A\left[x - \frac{4a}{1.3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{16a^2}{1.2.3.4}x^2 - \frac{64a^3}{1.2.3^2.4.5}x^{\frac{5}{2}} + \text{etc.}\right]\log Cx.$$

10. Développer l'intégrale de l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^m.$$

Si l'on pose,

$$y = \frac{1}{az}\cdot\frac{dz}{dx},$$

z étant une fonction de x à déterminer, l'équation devient

$$\frac{d^2z}{dx^2} = abx^mz,$$

équation qui n'est autre que celle traitée dans l'exemple III, si l'on remplace z par y et $-ab$ par a.

